

Devoir de Contrôle N°2

Durée : 1H

N.B : Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.

EXERCICE N° 1 :

Calculer les primitives suivantes.

$$\int \frac{x+2}{x+1} dx ; \quad \int \frac{x+1}{x^2+1} dx ; \quad \int \frac{\arctan x}{x^2+1} dx ; \quad \int x^2 \ln(x) dx$$

EXERCICE N° 2 :

- 1) a/ Donner le développement limité à l'ordre 3 de $e^{\sqrt{1+\sin x}}$ au voisinage de 0.
- b/ Donner le développement limité à l'ordre 3 de $\tan x$ au voisinage de 0.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{\sqrt{1+\sin x}} - e}{\tan x} & \text{si } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\setminus \{0\} \\ f(0) = \frac{e}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- 2) a/ Dédurre des questions précédentes que le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de 0 est $f(x) = \frac{e}{2} - \frac{11ex^2}{48} + o(x^2)$.
- b/ Donner l'équation de la tangente T_M en $M(0, f(0))$, ainsi que la position de la courbe de f par rapport à T_M .

EXERCICE N° 3 :

Soit G la fonction définie par : $G(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

- 1) Montrer que G est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ puis calculer $G'(x)$ pour $x \neq 0$.
- 2) Montrer que pour tout $x > 0$; $e^{2x} \ln(2) \leq G(x) \leq e^{-x} \ln(2)$.
- 3) Dédurre $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.

On donne :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + O(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + O(x^3) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$