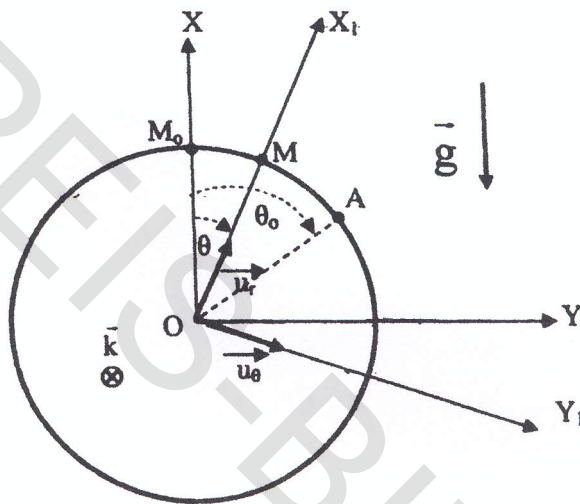


**DEVOIR DE CONTROLE N°1**  
**(DUREE : 1h30mn)**

**Problème**

On considère un référentiel fixe  $R(O, X, Y, Z)$  de vecteurs de base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et un référentiel mobile  $R_1(O, X_1, Y_1, Z_1)$  de vecteurs de base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$  tournant autour de l'axe  $OZ_1$  avec une vitesse angulaire variable  $\dot{\theta} = \omega \neq \text{constante}$  ( $OZ_1$  confondu avec  $OZ$ ).

Une bille ponctuelle  $M$  de masse  $m$  est susceptible de glisser sans frottement sur une circonférence de centre  $O$  et de rayon  $r$  placée dans le plan vertical  $XOY$ .



A l'instant initial  $t=0$ , la bille  $M$  est abandonnée sans vitesse initiale à partir du point  $M_0$  situé sur la verticale ascendante  $OX$ .

Tous les vecteurs doivent être exprimés dans la base cylindrique  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ .

**Partie A : Cinématique**

1)

- Déterminer les composantes du vecteur vitesse absolue  $\vec{V}_a$  de la bille  $M$  en utilisant le théorème de composition des vitesses.
- Calculer son module  $V_a$ .
- A quelle condition le mouvement est-il uniforme ? Déterminer dans ce cas la loi horaire  $S(t)$  : l'abscisse curviligne du mouvement de la bille  $M$  sachant que l'origine du mouvement est prise à  $t = 0$ .

2)

- Déterminer les composantes du vecteur accélération absolue  $\vec{\gamma}_a$  de la bille  $M$  en utilisant le théorème de composition des accélérations.

b) Retrouver  $\vec{\gamma}_a$  par un calcul direct.

3)

a) Déterminer l'expression du vecteur unitaire  $\vec{T}$  tangent à la trajectoire par rapport à R de la bille M.

b) En déduire les expressions des vecteurs normal  $\vec{N}$  et binormal  $\vec{B}$  de la base du repère de Frenet –Serret lié au mouvement absolu de la bille M.

c) Représenter les vecteurs de la base du repère de Frenet –Serret sur un schéma clair.

d) Donner les expressions des composantes tangentielle  $\gamma_T$  et normale  $\gamma_N$  de l'accélération absolue  $\vec{\gamma}_a$  de M.

e) En déduire le rayon de courbure  $R_c$  de la trajectoire par rapport à R de la bille M.

4) Calculer l'aire balayée par le vecteur  $\vec{OM}$  quand la bille se déplace de la position initiale  $M_0$  à une position finale M caractérisée par l'angle  $\theta$ .

### Partie B : Dynamique

1) Représenter, sur un schéma clair, les forces appliquées à la bille M dans R.

2) Ecrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la bille M dans le repère R.

3) Donner les projections de cette relation dans la base cylindrique et en déduire les équations différentielles du mouvement.

4)

a) Exprimer  $\dot{\theta}$  en fonction de  $g$ ,  $r$  et  $\cos \theta$ .

b) Exprimer alors la réaction  $\|\vec{R}\|$  de la circonférence sur la bille en fonction de  $m$ ,  $g$  et  $\cos \theta$ .

5)

a) On suppose que la bille quitte la circonférence au point A. Pour quelle valeur  $\theta_0$  de  $\theta$  la bille quitte-t-elle la circonférence ?

b) Quelle sera alors sa vitesse  $v_A$ ? Décrire qualitativement le mouvement ultérieur de M.

### Partie C: Energétique

1) Donner l'expression du travail élémentaire de chacune des forces appliquées sur la bille M dans R.

2) Montrer que la résultante de toutes ces forces dérive d'une énergie potentielle  $E_p$  que l'on déterminera. L'origine des énergies potentielles est prise pour  $\theta=0$ .

3) Donner l'expression de l'énergie cinétique  $E_c$  de la bille M dans R.

4) En déduire l'expression de l'énergie mécanique  $E_m$  de la bille M dans R.

5) Justifier la conservation de l'énergie mécanique  $E_m$  de M et retrouver l'équation différentielle de son mouvement.

**BONNE CHANCE**