

Math. / Algèbre

[E.F.S. N° 2]

Exercice 1 : Soit dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice $M = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

- 1) Déterminer le déterminant de M (c'est une 1^{ère} méthode).
- 2) Déterminer le déterminant de M par une autre méthode (c'est la 2^{ème}) et aussi une autre (c'est la 3^{ème}).
- 3) Dédire que M est inversible.

4) Soit la matrice $N = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 7 & -3 & 1 \\ 10 & -4 & 1 \end{bmatrix}$. Déterminer les deux matrices produit MN et NM de M et N et

en déduire alors que N est la matrice inverse M^{-1} de M .

5) Dédire que pour tout (a, b, c) donné dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} -\alpha - 2\beta + \gamma = a \\ -3\alpha - 5\beta + 2\gamma = b \\ -2\alpha - \gamma = c \end{cases}$ possède des solutions α, β et γ uniques dans $\mathbb{R}$ qu'on demande de déterminer.

6) Dédire en prenant en particulier $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ que le système $\begin{cases} -\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ -3\alpha - 5\beta + 2\gamma = 0 \\ -2\alpha - \gamma = 0 \end{cases}$

possède des solutions α, β et γ uniques dans $\mathbb{R}$ qu'on demande de donner.

Exercice 2 : Soit $\mathbb{R}^3$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, dit aussi le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, muni de « + » et « . » usuelles

(: $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ et $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ pour tout λ de $\mathbb{R}$) et soit les trois vecteurs w_1, w_2 et w_3 suivants,

$$w_1 = (-1, -3, -2) \quad , \quad w_2 = (-2, -5, 0) \quad , \quad w_3 = (1, 2, -1)$$

- 1) Prouver que (w_1, w_2, w_3) est libre.

2) Prouver que (w_1, w_2, w_3) est générateur de l'espace $\mathbb{R}^3$.

3) a) Justifier que (w_1, w_2, w_3) est une base de l'espace $\mathbb{R}^3$.

b) Donner pour tout (a, b, c) élément de $\mathbb{R}^3$ les réels α, β et γ tel que $\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 = (a, b, c)$.

Exercice 3 : Soit $\mathbb{R}^3$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, dit aussi le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, muni de « + » et « . » usuelles

et soit l'ensemble $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0 \}$.

1) a) Prouver que pour tous éléments u et v de F , $u + v \in F$

b) Prouver que pour tous éléments u de F et λ de $\mathbb{R}$, $\lambda u \in F$

2) Dédire alors que F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

3) a) Vérifier que F peut s'écrire $F = \{ x(1, 0, 1) + y(0, 1, -1) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

b) Dédire que $((1, 0, 1), (0, 1, -1))$ est une base de F .

Bonne chance