

Math. / Algèbre

[ D.C.N° 2 ]

**Exercice 1 :** Soit dans  $M_3(\mathbb{R})$  la matrice  $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

- 1) Déterminer le déterminant de M.
- 2) M est-elle inversible ? ( par déduction de 1) ).
- 3) Soit  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  des éléments de  $\mathbb{R}$ . Déterminer les trois déterminants suivants,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ \beta & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 1 & \beta & 0 \\ 1 & \gamma & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 1 & 1 & \beta \\ 1 & 0 & \gamma \end{vmatrix}$$

- 4) Donner la solution  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  du système  $\begin{cases} x - y - z = \alpha \\ x + y = \beta \\ x + z = \gamma \end{cases}$ .

( Indication : par déduction de 3) ).

**Exercice 2 :** Soit les deux matrices A et P dans  $M_2(\mathbb{R})$  suivantes,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 1) a) Justifier que P est inversible.

- b) Vérifier que la matrice inverse  $P^{-1}$  de P est  $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

[ Rappel du produit :  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}$  ].

- 2) Soit la matrice  $D = P^{-1}AP$ . En calculant cette matrice produit vérifier que  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ .

- 3) Justifier que  $D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{bmatrix}$ , pour tout entier n dans  $\mathbb{N}$ .

( On rappelle que pour toute matrice B dans  $M_2(\mathbb{R})$ , par définition,  $B^{n+1} = B B^n$ , c'est-à-dire le

produit de B par  $B^n$ , avec par convention  $B^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ).

4) a) Justifier que  $A = P D P^{-1}$ .

b) Sachant que  $A^n = P D^n P^{-1}$ , déduire la matrice  $A^n$ .

5) Soit pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  des réels  $u_n$  et  $v_n$  tel qu'on a le système (S) suivant,

$$(S) : \begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n - v_n \end{cases}$$

a) Soit  $X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$ . justifier que  $X_{n+1} = A X_n$  et en déduire que  $X_n = A^n X_0$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .

b) Déduire alors  $u_n$  et  $v_n$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .

*Bonne chance*