



Math. / Algèbre

[D.C.N°1]

Exercice 1 : Soit le nombre complexe $j = e^{i 2\pi/3} \left(= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

1) a) Justifier que $j^3 = 1$ et que $\frac{1}{j} = \bar{j}$.

b) Dédire que $j^2 = \bar{j}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer j^n .

(Indication : distinguer les trois cas : $n=3p$, $n=3p+1$ et $n=3p+2$ où $p \in \mathbb{N}$).

3) Soit z un nombre complexe $\neq 1$. Prouver par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

4) Dédire $\sum_{k=0}^{2025} j^k$, $\sum_{k=0}^{2026} j^k$ et $\sum_{k=0}^{2027} j^k$.

Exercice 2 : Soit $x \in \mathbb{R}$.

1) Justifier que, $\cos(4x) + i \sin(4x) = (\cos x + i \sin x)^4$.

2) Justifier que pour tous u et v nombres complexes,

$$(u + v)^4 = u^4 + 4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 + v^4$$

(Indication : le binôme de Newton donne une méthode rapide).

3) Dédire (en utilisant 1) et 2)) que,

$$\cos(4x) = 8(\cos x)^4 - 8(\cos x)^2 + 1$$