

Math. / Algèbre

[E.F.S. N° 1]

Exercice 1 : Soit dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Déterminer le rang de M par transformations élémentaires (opérations élémentaires) sur les lignes.

Exercice 2 : Soit dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & -4 \end{bmatrix}$. Déterminer la matrice inverse B^{-1} de B par transformations élémentaires (opérations élémentaires) sur les lignes.

Exercice 3 : Soit dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(On rappelle que le coefficient d'une i ème ligne et j ème colonne d'une matrice produit AB dans $M_3(\mathbb{R})$ est le produit de

la i ème ligne de A par la j ème colonne de B , que $O_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec pour toute matrice M dans

$M_3(\mathbb{R})$, $I_3 M = M = M I_3$).

1) a) Déterminer la matrice N^2 .

b) Vérifier alors que N^3 est la matrice nulle O_3 .

2) On pose $P = I_3 + N$.

a) Vérifier que $P^3 = I_3 + 3N + 3N^2$.

b) Dédire que $P^3 = I_3 + 3(P - I_3)P$.

c) Dédire que P est inversible et donner la matrice inverse P^{-1} de P en fonction de P et I_3 .

d) Déduire que $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3) Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ et on pose $D = P^{-1} A P$.

a) Déterminer la matrice D .

b) La matrice D est-elle diagonale ? Déterminer la matrice D^n pour tout entier n dans $\mathbb{N}^*$.

c) Prouver que $A = P D P^{-1}$.

d) En utilisant la formule $A^n = P D^n P^{-1}$, déterminer la matrice A^n , pour tout entier n dans $\mathbb{N}^*$.

Bonne chance