

Devoir de contrôle n°1: Analyse.



Exercice 1 .

Calculer les limites suivantes:

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n + n^2 \ln(n)}{\sin(n) + n^3}, \quad (b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad (c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{1}{n}} - 1}, \quad (d) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 E\left(\frac{1}{n}\right).$$

où E désigne la fonction partie entière.

Exercice 2 .

On définit les deux suites réelles $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ V_0 = 1 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}V_n \\ V_{n+1} = \frac{4}{5}V_n + \frac{1}{5}U_n \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = U_n - V_n$.

- (a) Montrer que $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera sa raison.
(b) Exprimer W_n en fonction de n .
(c) En déduire que: $\forall n \in \mathbb{N}, V_n \leq U_n$.
- Etudier la monotonie des suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Exercice 3 .

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{3 - a_n}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Soit $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{x}{3-x}$.

- Tracer le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0, 2]$.
- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n < 2$.
- Etudier la monotonie de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- En déduire que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie à déterminer.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \frac{1}{a_n}$.

- Vérifier que $b_{n+1} = 3b_n - 1$.
- Déterminer alors, l'expression de a_n en fonction de n . En déduire un équivalent simple de a_n .
