

—Matière:Analyse .

Section : PB

A.U : 2024/2025

Devoir de Synthèse N°1

Durée : 2H

N.B : Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.

EXERCICE N° 1 :

En utilisant la méthode des équivalents .Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x^2)}{x \sin \pi x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \ln(1 + x^3 e^{-x})$$

EXERCICE N° 2 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto e^{x^3}.$$

1) a / Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

b / Déterminer $f(\mathbb{R})$ et déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$.

2) Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1} et exprimer $(f^{-1})'(x)$.

EXERCICE N° 3 :

Soit $a, b \in \mathbb{R}/a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$ vérifiant $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.

Soit g la fonction définie sur $[a, b]$ par $g(x) = (f(x) - f'(x))e^x$.

1) Enoncer le théorème de Rolle.

2) a / Montrer que g est continue sur $[a, b]$

b / Montrer que g est dérivable sur $[a, b]$

c / Calculer $g(a)$ et $g(b)$.

3) Dédurre qu'il existe $c \in]a, b[$ / $f(c) = f''(c)$.

EXERCICE N° 4 :

I) On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

1) Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f .

2) Calculer : $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$.

3) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer sa fonction dérivée.

II) On considère la fonction g définie par : $g(x) = \arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

1) Déterminer le domaine de définition et de continuité de la fonction g .

2) la fonction g est – elle prolongeable par continuité en (-1) .

3) a/ Déterminer le domaine de dérivabilité de g et calculer sa fonction dérivée.

b/ Dédire une écriture plus simple pour g .