

DEVOIR N°1 (SYNTHESE)
(DUREE :3h)

N.B: Il sera tenu compte de la présentation des copies.

Exercice 1

Soit un point mobile M dans un référentiel galiléen. Ses coordonnées rapportés à un système d'axe R (OXYZ) sont, en fonction du temps :

$$\begin{cases} X(t) = t \\ Y(t) = \frac{t^2}{4} - 1 \\ Z(t) = 0 \end{cases}$$

- 1) Etablir l'équation de la trajectoire Y(X) du point M.
- 2) Représenter cette trajectoire dans le plan (XOY).
- 3) Déterminer le vecteur vitesse du point M ainsi que son module.
- 4) Déterminer le vecteur accélération du point M ainsi que son module.
- 5) Quelle est la nature du mouvement de M ? Justifier.
- 6) Donner les expressions des composantes tangentielle et normale de l'accélération de M.
- 7) Dédurre le rayon de courbure R_c de la trajectoire.

Exercice 2

Un point matériel M décrit une hélice dans un repère fixe R (OXYZ). Ses coordonnées cylindriques sont telles que :

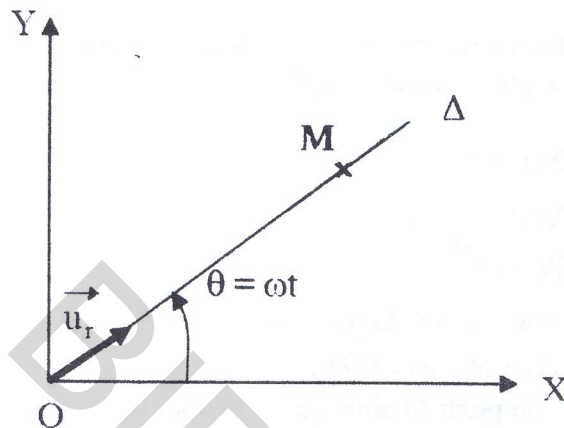
$$\begin{cases} r(t) = a \\ \theta(t) = \omega t \\ Z(t) = bt \end{cases} \quad a, b \text{ et } \omega \text{ sont des constantes positives.}$$

- 1) Ecrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ du point matériel M en coordonnées cylindriques.
- 2) Déterminer les composantes cylindriques du vecteur vitesse $\vec{V}(M)$ et montrer que son module est constant.
- 3) Déterminer les composantes cylindriques du vecteur accélération $\vec{\gamma}(M)$ ainsi que son module.
- 4) Calculer le produit scalaire $\vec{\gamma} \cdot \vec{V}$. Que peut en déduire pour les composantes tangentielle et normale de l'accélération ?
- 5) Déterminer les vecteurs unitaires $\vec{T}$, $\vec{N}$ et $\vec{B}$ du repère de Frenet-Serret.
- 6) Calculer le rayon de courbure de la trajectoire R_c .
- 7) Montrer que l'angle α que fait la vitesse $\vec{V}$ avec l'axe OZ est constant. En déduire l'hodographe du mouvement de M.

Exercice 3

Sur une tige Δ , située dans le plan (XOY) d'un repère fixe R (OXYZ) et de base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, se trouve un point M défini par $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ où $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire de Δ , $r = ae^{-\theta}$, $\theta = \omega t = \angle(\vec{i}, \vec{u}_r)$ où a et ω sont des constantes positives. La tige Δ tourne autour de O dans le plan (XOY) avec une vitesse angulaire constante ω .

On attache à la tige Δ un référentiel mobile R' de base orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.



Tous les vecteurs doivent être exprimés dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$. du repère R'.

I-1) Déterminer la vitesse $\vec{V}_r$ du point M par rapport à R'.

I-2) Déterminer la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e$ de R' par rapport à R.

I-3) Déduire les composantes de la vitesse $\vec{V}_a$ du point M par rapport à R ainsi que son module.

I-4) Retrouver, à partir d'une dérivation directe du vecteur $\vec{OM}$, l'expression de la vitesse absolue $\vec{V}_a$ du point M.

I-5) Représenter au point M les différentes vitesses $\vec{V}_r$, $\vec{V}_e$ et $\vec{V}_a$.

II-1) Déterminer l'accélération $\vec{\gamma}_r$ du point M par rapport à R'.

II-2) Déterminer l'accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ de R' par rapport à R.

II-3) Déterminer l'accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_c$ du point M.

II-4) Déduire les composantes de l'accélération $\vec{\gamma}_a$ du point M par rapport à R.

II-5) Retrouver, à partir d'une dérivation directe du vecteur $\vec{V}_a$, l'accélération $\vec{\gamma}_a$ de M par rapport à R.

On s'intéresse au mouvement absolu du point M.

III-1) Déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération du point M.

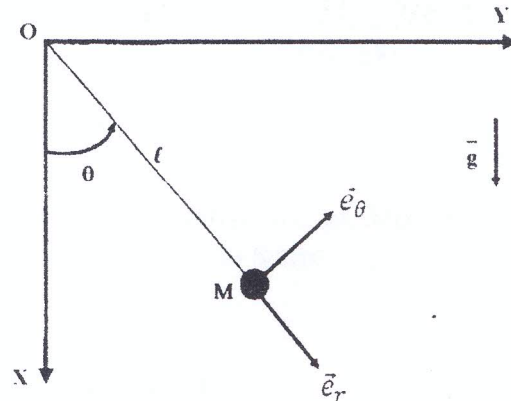
III-2) En déduire le rayon de courbure R_c de la trajectoire absolue.

III-3) Déterminer les vecteurs unitaires $\vec{T}$, $\vec{N}$ et $\vec{B}$ du repère de Frenet-Serret.

Exercice 4

On considère un pendule simple constitué d'une bille ponctuelle M de masse m , accrochée à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable. Son mouvement a lieu dans le plan vertical (XOY) d'un référentiel fixe R (OXYZ). On écarte le pendule d'un angle θ_0 de sa position d'équilibre verticale et on le

lâche sans vitesse initiale. Les forces de frottement sont supposées négligeables. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ considéré comme uniforme.



Tous les résultats seront exprimés dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

Partie A : Cinématique

- 1) Déterminer l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de la bille.
- 2) Calculer $\overrightarrow{v}_{/R}(M)$: le vecteur vitesse de M par rapport à R.
- 3) Calculer $\overrightarrow{\gamma}_{/R}(M)$: le vecteur accélération de M par rapport à R.

Partie B : Dynamique

- 1) Représenter soigneusement les forces appliquées à la bille M dans R.
- 2) Donner les expressions de ces forces.
- 3) Ecrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la bille M dans le référentiel R.
- 4) Projeter cette relation et déduire l'équation différentielle du mouvement de la bille M dans le cas des faibles oscillations.
- 5) Donner alors la loi horaire $\theta(t)$.

Partie C: Energétique

- 1) Donner l'expression du travail élémentaire de chacune des forces appliquées sur la bille M dans R.
- 2) Montrer que la résultante de toutes ces forces dérive d'une énergie potentielle E_p que l'on déterminera. L'origine des énergies potentielles est prise pour $\theta=0$.
- 3) Donner l'expression de l'énergie cinétique E_c de la bille M dans R.
- 4) En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m de la bille M dans R.
- 5) Justifier la conservation de l'énergie mécanique E_m de M et retrouver l'équation différentielle de son mouvement.

BONNE CHANCE.