

Mathématiques / AlgèbreE.F.S- N°2

(On rappelle que dans $\mathbb{R}^3$ l'espace vectoriel usuel sur $\mathbb{R}$ (dit aussi le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ usuel) la somme de deux éléments de $\mathbb{R}^3$ est définie par $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ et le produit d'un élément de $\mathbb{R}^3$ par un élément λ de $\mathbb{R}$ est défini par $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$).

Exercice 1 : Soit $\mathbb{R}^3$ l'espace vectoriel usuel sur $\mathbb{R}$.

- 1) Soit w_1, w_2 et w_3 des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. Que signifie que (w_1, w_2, w_3) est libre ?
- 2) Que signifie que (w_1, w_2, w_3) est générateur (ou famille génératrice) de $\mathbb{R}^3$?
- 3) Que signifie que (w_1, w_2, w_3) est une base de $\mathbb{R}^3$?
- 4) Soit λ un réel (paramètre) et les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$,

$$u = (1, 1, 2) \quad , \quad v = (1, -2, -1) \quad , \quad w_\lambda = (1, 1, \lambda)$$

En prenant $\lambda = 2$, prouver que (u, v, w_2) n'est pas libre.

- 5) a) Soit $\lambda = 1$. Prouver que (u, v, w_1) est libre.
- b) Prouver que (u, v, w_λ) est libre pour tout $\lambda \neq 2$.

Exercice 2 : Soit $\mathbb{R}^3$ l'espace vectoriel usuel sur $\mathbb{R}$, soit c un réel (paramètre) et soit la partie F_c de $\mathbb{R}^3$,

$$F_c = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4y - z = c \}$$

- 1) Soit $c \neq 0$.
 - a) Vérifier que $(0, 0, 0) \notin F_c$.
 - b) F_c est-il un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$? (pour $c \neq 0$).

- 2) Soit $c = 0$. Justifier que F_0 est non vide.
- 3) a) Justifier que pour tous u et v éléments de F_0 , $u + v \in F_0$
- b) Justifier que pour tous λ élément de $\mathbb{R}$ et u élément de F_0 , $\lambda u \in F_0$
- 4) F_0 est-il un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$?
- 5) a) Soit v_1, v_2 et v_3 des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Que signifie $\text{Vect}(\{v_1, v_2, v_3\})$?
- b) Prouver que, $F_0 = \text{Vect}(\{(1, 0, 1), (0, 1, 4)\})$
- 6) a) Prouver que $\{(1, 0, 1), (0, 1, 4)\}$ est libre.
- b) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 4)\}$ est-il générateur (ou génératrice) de F_0 ?
- 7) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 4)\}$ est-elle une base de F_0 ?
- 8) a) Vérifier que $(1, 4, -1) \notin F_0$.
- b) Prouver que $\{(1, 0, 1), (0, 1, 4), (1, 4, -1)\}$ est libre.
- 9) Justifier que $\{(1, 0, 1), (0, 1, 4), (1, 4, -1)\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
- 10) Dédurre que pour tout $w \in \mathbb{R}^3$, il existe un vecteur u dans F_0 et un réel λ tel que,

$$w = u + \lambda (1, 4, -1)$$

Bonne chance