

Université de sfax

Institut Préparatoire aux Etudes d'ingénieurs de Sfax

—Matière:Analyse .

Section : PB

A.U : 2024/2025

Devoir de Synthèse N°2

Durée : 2H

N.B : Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.

EXERCICE N° 1 :

1) Montrer qu'il existe a et $b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}.$$

2) Déterminer les primitives sur $]1, +\infty[$ de $\frac{1}{x^2 - 1}$.

3) Soit (E) l'équation différentielle définie par :

$$(E): y' - \frac{1}{x^2 - 1} y = 2x - 1.$$

a/ Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation homogène associée à (E) .

b/ Vérifier que la fonction $f(x) = x^2 - 1$ est une solution particulière de (E) .

c/ Dédire l'ensemble des solutions de (E) sur $]1, +\infty[$.

EXERCICE N° 2 :

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E): y'' + \frac{2}{x} y' - y = \frac{1}{x} \text{ telque } x \in]0, +\infty[.$$

$$(E'): z'' - z = 1.$$

On pose : $y = \frac{z}{x}$ (y solution de $(E) \Leftrightarrow z$ solution de (E')).

1) Effectuer le changement de l'inconnu précédent dans l'équation différentielle (E) et vérifier que (E) se ramène à l'équation (E') .

2) Résoudre l'équation différentielle (E') .

3) Dédire les solutions de l'équation différentielle (E) .

EXERCICE N° 3 :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \left(-\frac{3}{x} + x - 3x^2\right) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|.$$

1) a/ Déterminer le domaine de définition de f .

b/ Donner le développement limité à l'ordre 4 de $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ au voisinage de zéro.

c/ Dédire le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de zéro.

d/ Montrer que f est prolongeable au point 0

e/ Donner l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0 ainsi que sa position relative par rapport à C_f .

2) a/ Donner le développement limité de $\frac{f(x)}{x}$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$.

b/ Déterminer l'équation de l'asymptote oblique Δ au voisinage de $+\infty$ ainsi que sa position relative par rapport à C_f au voisinage de $+\infty$.

On donne :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p} + O(x^p).$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^p}{p} + O(x^p).$$