

Devoir Algèbre 1

Exercice 1 Soient α et β deux réels strictement positifs.

1. Déterminer la partie réelle de $(\alpha + i\beta)(\cos(-t) + i\sin(-t))$.
(Rappel : $\cos(-t) = \cos(t)$ et $\sin(-t) = -\sin(t) \forall t \in \mathbb{R}$)
2. a) Justifier qu'il existe deux réels r et φ avec $r > 0$ tels que $\alpha + i\beta = re^{i\varphi}$.
b) Dédire que $(\alpha + i\beta)(\cos(-t) + i\sin(-t)) = re^{i(\varphi-t)} \forall t \in \mathbb{R}$.
c) Dédire d'après b) et 1) que, $\alpha\cos(t) + \beta\sin(t) = r\cos(t - \varphi), \forall t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 Prouver par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n > n$$

Exercice 3 Soit l'application

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$$

(On rappelle que $(u, v) = (u', v')$ signifie que $u = u'$ et $v = v'$ pour tous (u, v) et (u', v') éléments de $\mathbb{R}^2$.

1. Prouver que f est bijective.
2. Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f .