

Devoir de Contrôle N°1

Durée : 1H

N.B : Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.EXERCICE :

1°) Donner un équivalent simple de :

$$a) U_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{n+1}} \qquad b) U_n = \ln \frac{n}{n+1}$$

2°) Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{2}{e^n - 1}} \qquad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1 + e^{-n})$$

PROBLEME : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 < U_n < 1$

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{4} \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2+2U_n} \end{cases}$$

1°) a / Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $0 < U_n < 1$.b / Montrer que (U_n) est décroissante et déduire qu'elle est convergente.C / Déterminer la limite de (U_n) .2°) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par: $V_n = 1 + \frac{1}{2U_n}$.a / Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2 .b / Exprimer V_n en fonction de n ; puis déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$U_n = \frac{1}{3 \times 2^{n-2}} .$$

C / Retrouver la limite de (U_n) .

3°) Soit (W_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $W_n = \frac{2^n}{n}$.

a / Montrer que pour tout $n \geq 3$: $\frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{3}{2}$.

b / Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 3$: $W_n \geq 4\left(\frac{3}{2}\right)^{n-4}$.

c / Déterminer la limite de (W_n) .