

—Matière:Analyse

Section : PB



A.U : 2025/20

Devoir de Synthèse N°1

Durée :

N.B : Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.

EXERCICE N° 1 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^{2x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - x}{\ln(1+x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$$

EXERCICE N° 2 :On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right)$$

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f .
- 2) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer sa dérivée.

$$3) \text{Déduire que } f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

PROBLEME :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{5} (4+x^2)$.

A / 1) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\text{si } x \in [0, 1] \Rightarrow f(x) \in [0, 1].$$

$$\text{si } x \in [4, +\infty[\Rightarrow f(x) \in [4, +\infty[.$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$.

4) a/ Montrer que : $\forall x \in [0, 1]; |f'(x)| \leq \frac{2}{5}$

b/ Montrer que : $\forall x \geq 4; f'(x) \geq \frac{8}{5}$

B / On considère la suite U définie par :

$$U_0 \in \mathbb{R} \text{ et } U_{n+1} = \frac{1}{5} (4 + U_n^2); \forall n \in \mathbb{N}.$$

1) Dans cette question on prend $U_0 = 0$.

a/ Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}; U_n \in [0, 1]$.

b/ En utilisant l'inégalité des accroissements finis ; montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}; |U_{n+1} - 1| \leq \frac{2}{5} |U_n - 1|$.

c/ A l'aide d'un raisonnement par récurrence , montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}; |U_n - 1| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

d/ En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

2) On suppose dans cette question que $U_0 = 6$.

a/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; U_n \in [4; +\infty[$.

b/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} - 4 \geq \frac{8}{5} (U_n - 4)$

c/ Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; U_n \geq 4 + 2\left(\frac{8}{5}\right)^n$.

d/ En déduire alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.