

DEVOIR N°1 (SYNTHESE)
(DUREE :3h)

Exercice 1

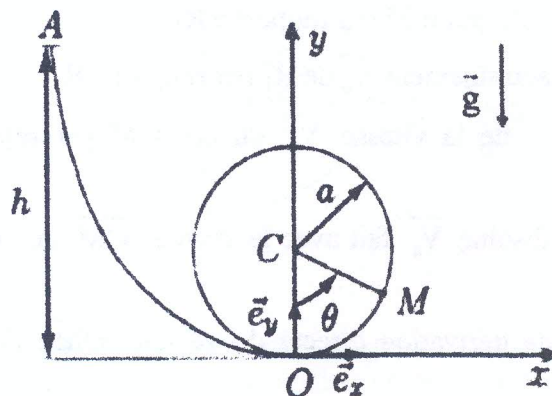
Soit un point mobile M dans un référentiel galiléen. Ses coordonnées rapportées à un système d'axe R (OXYZ) sont, en fonction du temps :

$$\begin{cases} X(t) = t \\ Y(t) = t^2 \\ Z(t) = 0 \end{cases}$$

- 1) Etablir l'équation de la trajectoire Y(X) du point M.
- 2) Représenter cette trajectoire dans le plan (XOY).
- 3) Déterminer le vecteur vitesse du point M ainsi que son module.
- 4) Quelle est la nature du mouvement de M ? Justifier.
- 5) Déterminer le vecteur accélération du point M ainsi que son module.
- 6) Donner les expressions des composantes de l'accélération dans le repère de Frenet –Serret lié au point mobile M.
- 7) Déduire le rayon de courbure R_c de la trajectoire du point M en fonction de t.
- 8) Déterminer les vecteurs unitaires du repère de Frenet –Serret.

Exercice 2

Une bille assimilée à un point matériel M, de masse m, est lâchée sans vitesse initiale depuis le point A ($V_A = 0$) d'une gouttière située à une hauteur h du point le plus bas O de la gouttière. Cette dernière est terminée par un guide circulaire de rayon a disposé verticalement. La bille M, dont le mouvement a lieu sans frottement, peut éventuellement quitter la gouttière vers l'intérieur du cercle. On désigne par $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur.

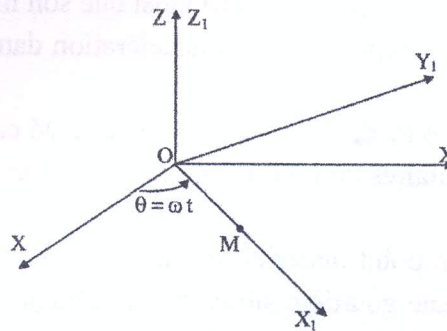


- 1) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, exprimer la vitesse V_0 de M à son passage en O, en fonction de g et h.
En arrivant en O, La bille M quitte la gouttière et se met à glisser sans frottement sur la face intérieure du guide circulaire.
- 2) Exprimer la vitesse V_M de la bille M en un point quelconque de la trajectoire caractérisé par l'angle $\widehat{OCM} = \theta$.

- 3) Sur un dessin clair, représenter les forces appliquées à la bille M sur les deux trajets avant et après passage par O (sur la gouttière et sur le guide circulaire).
- 4) En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, exprimer la réaction $\|\vec{R}\|$ du guide circulaire sur la bille, en fonction de m , g , a , h et θ .
- 5) Déterminer la hauteur minimale $h_{\min}$ à partir de laquelle il faut lâcher la bille sans vitesse initiale pour qu'elle ait un mouvement révolutif (de rotation) dans le guide.
- 6) On lâche de nouveau la bille M sans vitesse initiale depuis le point A ($V_A = 0$) d'une hauteur $h = 2a$, exprimer alors l'angle θ_q pour lequel la bille quitte le guide circulaire.

Exercice 3

On considère un référentiel fixe R ($OXYZ$) de vecteurs de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont l'axe OZ est vertical. Un référentiel mobile R_1 ($OX_1Y_1Z_1$) de vecteurs de base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ d'axe OZ_1 confondu avec OZ tourne autour de l'axe OZ avec une vitesse angulaire constante ω positive. Un point matériel M se déplace le long de l'axe OX_1 selon la loi $\overline{OM} = e^{\omega t} \vec{i}_1$. voir figure.



Tous les vecteurs doivent être exprimés dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ du référentiel R_1 .

Partie I

- 1) Déterminer la vitesse $\vec{V}_r$ du point M par rapport à R_1 .
- 2) Déterminer la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e$ de R_1 par rapport à R .
- 3) Déduire les composantes de la vitesse $\vec{V}_a$ du point M par rapport à R ainsi que son module.
- 4) Montrer que la vitesse absolue $\vec{V}_a$ fait avec le vecteur $\overline{OM}$ un angle constant ϕ que l'on déterminera.
- 5) Retrouver, à partir d'une dérivation directe du vecteur $\overline{OM}$, l'expression de la vitesse absolue $\vec{V}_a$ du point M.
- 6) Représenter au point M les différentes vitesses $\vec{V}_r$, $\vec{V}_e$ et $\vec{V}_a$.

Partie II

- 1) Déterminer le vecteur accélération $\vec{\gamma}_r$ du point M par rapport à R_1 .
- 2) Déterminer le vecteur accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ de R_1 par rapport à R .

- 3) Déterminer le vecteur accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_c$ du point M.
- 4) Dédire les composantes du vecteur accélération $\vec{\gamma}_a$ du point M par rapport à R.
- 5) Montrer que l'accélération $\vec{\gamma}_a$ fait avec le vecteur $\vec{V}_a$ un angle constant α que l'on déterminera.
- 6) Retrouver, à partir d'une dérivation directe du vecteur $\vec{V}_a$, l'accélération $\vec{\gamma}_a$ de M par rapport à R.

Partie III

On s'intéresse au mouvement absolu du point M.

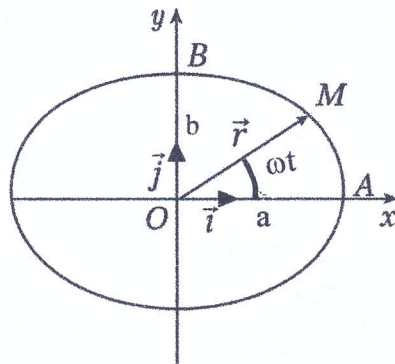
- 1) Déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération du point M.
- 2) En déduire le rayon de courbure R_c de la trajectoire absolue.
- 3) Déterminer les vecteurs unitaires $\vec{T}$, $\vec{N}$ et $\vec{B}$ du repère de Frenet-Serret.
- 4) Montrer que l'abscisse curviligne de M s'écrit $S(t) = \sqrt{2}(e^{\omega t} - 1)$ Sachant que $S(0)=0$.
- 5) En déduire la distance parcourue pendant l'intervalle de temps $[0, T]$ avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- 6) Calculer l'aire balayée par unité de temps, par le vecteur $\vec{OM}$ dans R.
- 7) En déduire l'aire balayée pendant l'intervalle de temps $[0, T]$.

Exercice 4 :

Un point matériel M de masse m se déplace sur une ellipse dans le plan xoy d'un repère galiléen R(oxyz) de façon que son vecteur position soit donné par :

$$\vec{OM} = \vec{r} = a \cos \omega t \vec{i} + b \sin \omega t \vec{j}$$

Avec a, b et ω sont des constantes positives telles que $a > b$.



- 1) Montrer que la force agissant sur le point matériel est en tout point dirigée vers l'origine.
- 2) Calculer l'énergie cinétique du point matériel aux points A(a,0,0) et B(0,b,0).
- 3) Calculer le travail fourni par la force en déplaçant le point matériel sur l'ellipse du point A au point B.
- 4) Montrer que la résultante des forces agissant sur M, dérive d'une énergie potentielle E_p qu'on déterminera en fonction de m, ω et r.
- 5) Calculer l'énergie potentielle aux points A et B.
- 6) En déduire le travail fourni par la force en déplaçant le point de A à B et comparer ce résultat avec celui obtenu à la 3^e question.
- 7) Calculer l'énergie totale du point matériel et montrer qu'elle est constante.