

INSTITUT PREPARATOIRE
AUX ETUDES D'INGENIEURS
DE SFAX

Département de la Préparation
Mathématiques Physique
Section MP1

Epreuve d'Algèbre MP1

Durée : 2 h Date : 04-01-2016 Nb pages : 2

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation.

Exercice 1 :

On munit l'ensemble $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de deux lois de composition internes :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (x, y) \times (x', y') = (xx', xy' + yx').$$

1. Montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif.
2. On note A^* l'ensemble des éléments inversibles dans A .

Montrer que $(A^*, \times)$ est un groupe abélien.

3. Une partie I de A est dite idéal si $\begin{cases} \bullet (I, +) \text{ est un sous-groupe de } A \\ \bullet \forall a \in I, \forall z \in A, a \times z \in I. \end{cases}$

Soit $M = \{(0, y) \in A; y \in \mathbb{R}\}$.

(a) Montrer que M est un idéal de A . On note $C_A^M = \{z \in A; z \notin M\}$.

(b) Soit $z \in A$. Montrer que $z \in C_A^M \iff z$ est inversible dans A .

(c) En déduire que $(C_A^M, \times)$ est un groupe.

4. Montrer que $\{0\}$, M et A sont les seuls idéaux de A .

Exercice 2 :

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $F(X) = \frac{3X - 1}{X^2 - 1}$.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $d^0 P \geq 1$.

Montrer que si $P(X) = c \prod_{k=1}^m (X - \lambda_k)^{m_k}$, alors $\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^m \frac{m_k}{X - \lambda_k}$. où $m_k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_k \in \mathbb{C}, \forall k \in \{1, \dots, m\}$.

3. Soit $\varphi : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[X]$
 $P(X) \longmapsto (X^2 - 1)P'(X) - (3X - 1)P(X)$.

(a) Montrer que, $\forall (P, Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$ et $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\varphi(\alpha P + Q) = \alpha \varphi(P) + \varphi(Q)$.

(b) On note $\ker(\varphi) = \{P \in \mathbb{C}[X]; \varphi(P) = 0\}$.

Soit $P \in \ker(\varphi)$. Montrer que si P est non constant, alors $F(X) = \frac{P'(X)}{P(X)}$.

(c) Dédurre que $\ker(\varphi) = \{a(X - 1)(X + 1)^2, a \in \mathbb{C}\}$.

4. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $\varphi(P) = 2P$.

Exercice 3 :

Soit $Q_n = (1 + X)^{2n} - (1 - X)^{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Montrer que le polynôme Q_n est impair.

(b) Vérifier que 0 est une racine simple de Q_n .

(c) Dédurre que $Q_n(X) = X P_n(X)$. où P_n est un polynôme pair.

2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de Q_n .

3. Déterminer toutes les racines de Q_n .

4. En déduire que $Q_n = 4nX \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 + \tan^2 \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \right)$.

5. Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \tan^2 \left(\frac{k\pi}{2n} \right) = 1$.

6. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{t^2}{4n^2 \tan^2 \left(\frac{k\pi}{2n} \right)} \right) = \frac{e^t - e^{-t}}{2t}$.

(On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{t}{2n} \right)^{2n} = e^t$).