

Devoir de Contrôle N° 1 : **Analyse**
Durée : 1H 30 mn

N.B : Aucun document n'est autorisé et l'usage du calculatrice est interdit.

Exercice 1/

1) Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a $\ln(1+x) \leq x$.

2) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

3) Soit $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

a) Déterminer le domaine de définition de f .

b) Montrer que $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\ln\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{x+1}$ pour $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de f (avec les valeurs des limites aux bornes et les valeurs extrémales si elles existent).

d) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation : $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2$.

4) Soient $U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $V_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$, pour $n \geq 2$.

a) Déterminer les sens de variation des suites $(U_n)_{n \geq 2}$ et $(V_n)_{n \geq 2}$ ainsi que leurs limites.

b) Retrouver le résultat de la question 2).

Exercice 2/

On considère l'équation différentielle

$$(E)(1+x^2)y' + 2xy = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Résoudre l'équation homogène associée :

$$(H)(1+x^2)y' + 2xy = 0.$$

2) En utilisant la méthode de la variation de la constante résoudre (E).

3) Trouver la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 0$.

4) Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\arctg(x)}{1+x^2} \end{aligned}$$

a) Calculer $I = \int_0^1 f(x)dx$.

b) Simplifier l'expression $f(\operatorname{tgt})$ avec $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

5) Calculer $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t \cos^2(t) dt$.

6) Soit $A = \left\{ \frac{\arctg(n)}{1+n^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que A est non vide minorée et trouver $\inf(A)$.

Exercice 3/

1) Déterminer $\inf \left\{ E\left(\frac{1}{x}\right) + E(x), x \in]0, 1[\right\}$.

2) Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n - 1$.

b) Montrer que $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

Bon Travail