

Devoir de Synthèse N° 1 : **Analyse**
 Durée : 2 H

N.B : Aucun document n'est autorisé.

Problème

Partie I :

On rappelle que la fonction **th** est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

1. Justifier que **th** est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que pour tout réel x on a :
 $\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x)$.
2. Montrer que **th** réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I qu'on déterminera.
 On note **argth** sa fonction réciproque.
3. Montrer que :

$$\forall x \in I, \text{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

4. Justifier la dérivabilité de **argth** sur I et calculer sa dérivée.
5. a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- i. Montrer que la dérivée d'ordre n de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est comme suit :

$$\left(\frac{1}{1+x} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

- ii. Dédire alors la dérivée d'ordre n de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

- b. Dédire que pour tout $x \in I$, la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de **argth**, est donnée par :

$$\text{argth}^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{2} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(1+x)^n} + \frac{1}{(1-x)^n} \right).$$

6. Ecrire la formule de Mac-Laurin de **argth** en tout point $x \in I \setminus \{0\}$, à l'ordre $n \in \mathbb{N}$.
7. Dédire que

$$\forall x \in]0, 1[, \text{argth}(x) > x + \frac{x^3}{3}.$$

Partie II :

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, et vérifiant :

$$\begin{cases} f \text{ est dérivable en } 0, \\ f(0) = 0, \\ \forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + f(x)^2}. \end{cases}$$

A-

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$ puis déduire que si $f \in \mathcal{A}$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in [-1, 1]$.
2. Montrer que si $f \in \mathcal{A}$ alors $-f \in \mathcal{A}$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto \tanh(\lambda x)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{A}$.

B- Dans cette partie **B**, on se propose de démontrer que toute fonction f dans $\mathcal{A}$ n'atteint pas les valeurs 1 et -1.

Pour ce faire, supposons par l'absurde qu'il existe un réel a non nul tel que $f(a) = 1$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = f\left(\frac{a}{2^n}\right)$.

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Exprimer U_n en fonction de U_{n+1} .
3. Déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et déterminer sa valeur.
4. Déduire alors une absurdité.
5. Justifier que f ne peut pas atteindre aussi la valeur -1.

C- Soit g la fonction donnée par $g(x) = \operatorname{argth}(f(x))$.

1. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(2x) = 2g(x)$.
3. Justifier que g est dérivable en 0.
4. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{2^n g\left(\frac{a}{2^n}\right)}{a}$.
Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = g'(0)$.
5. Montrer que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
6. Déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g'(0)x$.

D- Déterminer tous les éléments de l'ensemble $\mathcal{A}$.