

Devoir de Synthèse n°1
Epreuve de Physique

- L'usage des calculatrices est autorisé.
- Les exercices sont indépendants.
- Les résultats littéraux devront être encadrés.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité sera considérée comme fausse.
- Les résultats littéraux non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.

N. B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.



EXERCICE 1 (5 points)

On considère le filtre représenté par la figure 1. Soit ω la pulsation du signal sinusoïdal d'entrée V_e .

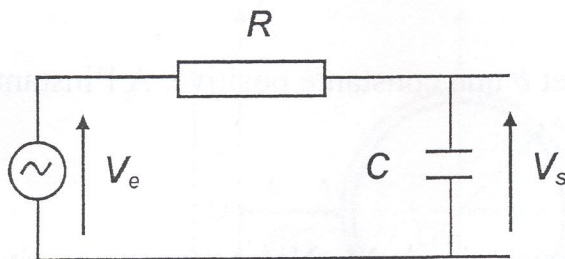


Figure 1

1. Déterminer la fonction de transfert $H(j\omega)$ de ce filtre. En déduire sa nature.
2. Déterminer le gain $G(\omega)$, le gain en décibels G_{dB} , ainsi que la phase φ du filtre.
3. Déterminer la pulsation de coupure ω_0 et la bande passante à -3 dB du filtre.

- Donner l'expression approchée de G_{dB} pour les hautes fréquences $\omega / \omega_0 \gg 1$.
Exprimer l'atténuation du filtre en dB/décade.
- Tracer l'allure des variations du gain G_{dB} et de la phase φ en fonction de $\log(\omega/\omega_0)$.

Maintenant on charge le filtre précédent par une résistance r ; (figure 2).

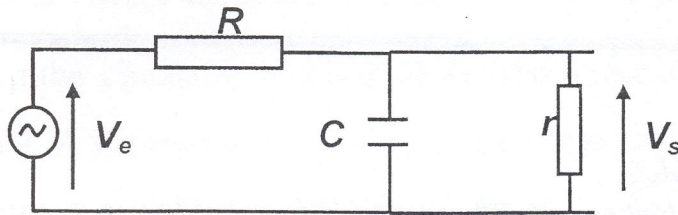


Figure 2

- Déterminer la nouvelle fonction de transfert $H'(j\omega)$.
- Déduire l'expression de la pulsation de coupure ω'_0 du filtre chargé.

EXERCICE 2 (5points)

Un point matériel M se déplace à une vitesse angulaire constante w ($w > 0$), sur une courbe, située dans le plan (O, xy) , dont l'équation polaire est :

$$OM = r = 4b \cos^3 \frac{\theta}{3} ;$$

avec l'angle $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ et b une constante positive. A l'instant initial $t = 0s$, l'angle θ est nul.

- Tracer l'allure de la trajectoire de M . Noter sur cette courbe le point de départ A et le point d'arrivée B du trajet du mobile M .
- Calculer, en coordonnées polaires, l'expression du vecteur vitesse du point matériel M , déduire sa norme v .
- Déterminer les vecteurs unitaires de la tangente $\vec{T}$ et celui de la normale $\vec{N}$ à la trajectoire.

4. On rappelle que la norme du vecteur vitesse est liée au déplacement élémentaire ds par la relation $v = \dot{s} = \frac{ds}{dt}$. Déterminer alors la longueur du parcours (AB) de la trajectoire.
5. Déterminer la durée τ du parcours (AB).
6. Déterminer les accélérations radiale a_r et orthoradiale a_θ .
7. Déterminer les composantes du vecteur accélération : a_t et a_n dans le repère de Frenet-Serré. En déduire l'expression du rayon de courbure $\rho(t)$.

Problème (10 points)

L'espace physique est rapporté au repère absolu, supposé galiléen, $\mathcal{R}_O(O, X, Y, Z)$ muni de la base orthonormée directe $\mathcal{B}_O(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, (OZ) étant l'axe vertical ascendant.

A°/ On considère un tube circulaire $\mathcal{C}$ de centre O' et rayon b , maintenu dans le plan vertical (YOZ). Une bille assimilée à un point matériel M de masse m est mobile sans frottement dans ce tube circulaire (figure 1). La position de M est repérée par l'angle $\theta(t) = (OY, O'M)$. Le tube circulaire soudé à la tige (OA), de longueur b , est immobile dans $\mathcal{R}_O(O, X, Y, Z)$.

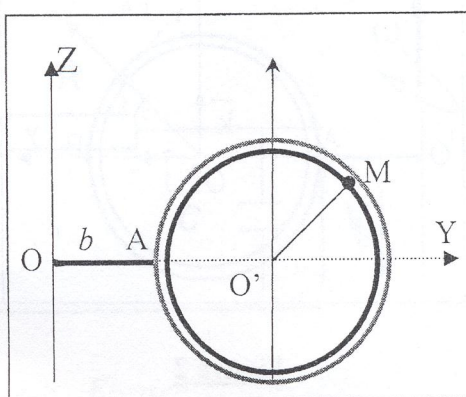


Figure 1

1. Exprimer le vecteur position $\vec{OM}$ dans la base $\mathcal{B}_O$.
2. Déterminer dans la base $\mathcal{B}_O$, les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ du mobile M par rapport au référentiel $\mathcal{R}_O$.

3. Dans le cas où la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est constante, trouver l'angle α que fait le vecteur vitesse avec celui de l'accélération. Que peut-on dire de la nature du mouvement.

B°/ Maintenant, le tube circulaire $\mathcal{C}$ et la tige (OA) tournent autour de l'axe vertical (OZ) à la vitesse angulaire constante ω . On désigne par $\mathcal{R}(O', x, y, z)$ le repère relatif lié au tube circulaire et muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = \vec{u}_z)$, voir figure 2. A l'instant initial $t = 0$ s, les axes (OY) et (O'y) sont confondus et le mobile M est placé au point B sans vitesse initiale.

On se propose d'étudier le mouvement de la bille M qui glisse sans frottement dans le tube circulaire $\mathcal{C}$. La position de M est repérée dans $\mathcal{R}$ par l'angle $\theta(t) = (Oy, O'M)$ et g est l'accélération de pesanteur : $\vec{g} = -g\vec{k}$.

NB : On exprimera dans ce qui suit toutes les grandeurs vectorielles dans la base mobile $\mathcal{B}(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{i})$.

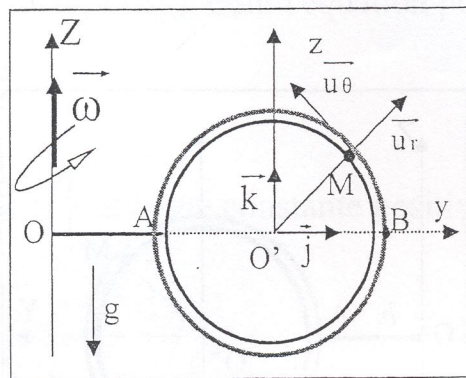


Figure 2

1. Quel est le mouvement du repère $\mathcal{R}$ par rapport au repère $\mathcal{R}_0$?
2. Exprimer les vecteurs $\vec{j}$, $\vec{k}$ et $\vec{w}$ dans la $\mathcal{B}(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{i})$.
3. Déterminer les vecteurs vitesses relative $\vec{v}_r$ et d'entraînement $\vec{v}_e$ de M. Dédire la vitesse absolue $\vec{v}_a$ du point M.

4. Déterminer les vecteurs accélérations : relative $\vec{a}_r$, d'entraînement $\vec{a}_e$ et de Coriolis $\vec{a}_c$ du point M. Déduire le vecteur accélération absolue $\vec{a}$ du point M.

C°/ On s'intéresse à l'étude dynamique de la bille M dans le référentiel relatif $\mathcal{R}$ afin de connaître ses positions d'équilibre relatif.

1. Identifier les forces qui s'exercent sur le point M dans le référentiel $\mathcal{R}$.
2. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée au point M dans $\mathcal{R}$ et la projeter dans la base $\mathcal{B}$.
3. En déduire les composantes de la réaction (R_r , R_θ , R_x) du tube circulaire sur la bille M.
4. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de M.
5. Dans le cas de faibles oscillations (θ petit, $\cos\theta \cong 1$ et $\sin(\theta) \cong \theta$), donner la forme simplifiée de l'équation différentielle du mouvement.
6. Montrer que la solution se met sous la forme $\theta(t) = A \cdot \cos(\Omega t + \varphi) + B$. Donner l'expression de Ω .
7. En tenant compte des conditions initiales, déterminer l'expression définitive de $\theta(t)$.

