

★ ★ ★ ★ ★

Institut Préparatoire aux Etudes D'ingénieurs de Sfax

Devoir de Synthèse d'Algèbre N°2

NB : L'usage de la calculatrice est strictement interdit.

Section : MP1

Durée : 02 Heures

N. de pages : 02

Exercice (04 pts)

Soit E l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur le segment $[-1, 1]$.

Pour $f, g \in E$, on pose : $\psi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)dt$.

1) Montrer que ψ est un produit scalaire sur E .

2) Pour $f \in E$ de classe $\mathcal{C}^2$, on pose $\phi(f) = [(x^2 - 1)f(x)]'' = (x^2 - 1)f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x)$.

Montrer que si $f, g \in E$ sont de classe $\mathcal{C}^2$, alors $\psi(\phi(f), g) = \psi(f, \phi(g))$.

Problème (16 pts)

On rappelle que : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de la forme : $M = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ avec

$a, b, c \in \mathbb{C}$.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A (c'est à dire $A = \text{Mat}(f, B)$).

1) Calculer A^2 et A^3 .

2) (a) Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et en donner une base.

(b) Montrer que : $I_3 \in \mathcal{F}$ et que : $\forall (M, N) \in \mathcal{F}^2$, on a : $MN \in \mathcal{F}$.

(c) Montrer que la propriété : $(\forall X, Y \in \mathcal{F}, XY = 0 \implies X = 0 \text{ ou } Y = 0)$ n'est pas vraie.
(Ind : Considérer $A^3 + I_3$).

3) (a) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, calculer $\det(A - \lambda I_3)$.

(b) On note $Sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } A - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible}\}$. Déterminer $Sp(A)$.

(c) Pour $\lambda \in \{-1, -j, -j^2\}$, on note $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_3)$. Déterminer une base B_1 de E_{-1} , une base B_2 de E_{-j} et une base B_3 de E_{-j^2} .

(d) Montrer que $B' = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

(e) Déterminer la matrice $D = \text{Mat}(f, B')$.

(f) Dédire une matrice inversible P de $GL_3(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

(g) En déduire que A^2 est semblable à une matrice diagonale à déterminer.

Les valeurs exactes de P et P^{-1} ne vont pas intervenir dans les questions suivantes.

4) (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{F}$. En utilisant 2)(a) et 3) (f)-(g), Montrer que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a-b+c & 0 & 0 \\ 0 & a-jb+j^2c & 0 \\ 0 & 0 & a-j^2b+jc \end{pmatrix}$$

(b) Prouver que l'application

$$\begin{aligned} \sigma : M_3(\mathbb{C}) &\longrightarrow M_3(\mathbb{C}) \\ M &\longmapsto P^{-1}MP \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(c) Vérifier que $\forall (M, M') \in M_3(\mathbb{C})^2$, on a : $\sigma(MM') = \sigma(M)\sigma(M')$.

(d) Montrer que $\sigma(\mathcal{F})$ est l'ensemble $D_3(\mathbb{C})$, des matrices diagonales de $M_3(\mathbb{C})$.

(e) En déduire de (b) et (d) que : $\forall M \in M_3(\mathbb{C}), M \in \mathcal{F} \iff \sigma(M) \in D_3(\mathbb{C})$

5) Soit $M = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{F}$,

(a) Montrer que M est inversible si et seulement si $(a-b+c)(a-jb+j^2c)(a-j^2b+jc) \neq 0$.

(b) On suppose que M est inversible et on pose $D = \sigma(M)$. Prouver que $\sigma(M^{-1}) \in D_3(\mathbb{C})$ puis en déduire que $M^{-1} \in \mathcal{F}$.

(c) Soit $M \in \mathcal{F}$ inversible. On veut résoudre l'équation (E) : $X^2 = M$ d'inconnu $X \in \mathcal{F}$.

Pour $X \in \mathcal{F}$, montrer que $X^2 = M \iff [\sigma(X)]^2 = \sigma(M)$.

En déduire que (E) admet exactement huit solutions dans $\mathcal{F}$.