

Devoir de contrôle N°1

Durée: 1h30

Epreuve: Analyse

Date: 21-02-2017

Problème

Les deux parties de ce problème sont indépendantes. Cependant les résultats de la partie I peuvent être utilisés librement dans la partie II.

Partie I

On rappelle qu'une fonction est dite Lipschitzienne sur $I \subset \mathbb{R}$ s'il existe un réel positif k tel que : $\forall x, y \in I$ on a $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

1. Soient $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $k > 0$ et $r > 0$ tels que f est k -Lipschitzienne sur $]0, r[$.
 - (a) Montrer que f est bornée sur $]0, r[$.
 - (b) Justifier l'existence d'une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset]0, r[$ de limite nulle.
 - (c) Montrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f(U_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie qu'on note ℓ .
 - (d) En utilisant ce qui précède montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ell$.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que f' admet une limite finie à droite en 0.
 - (a) Démontrer que f' est bornée sur un intervalle de la forme $]0, r[$ où $r > 0$.
 - (b) En utilisant la question 1., déduire que f admet une limite finie à droite en 0.

Partie II

On considère la fonction f définie par

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(\sqrt{x}) \end{array}$$

Le but de cette partie est de démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer ses dérivées successives en 0.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée première f' sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler les développements limités au voisinage de 0 de cosinus à l'ordre $2n$ et de sinus à l'ordre $2n - 1$.
(b) Déduire alors les développements limités au voisinage de 0 de f à l'ordre n et de f' à l'ordre $n - 1$.
(c) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux polynômes P_n, Q_n tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*; f^{(n)}(x) = \frac{f(x)}{x^{n-1}} P_n(x) + \frac{f'(x)}{x^{n-1}} Q_n(x)$$

Déterminer P_1, Q_1 et exprimer P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n, Q_n, P'_n et Q'_n .

4. Déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n f^{(n+1)}$ admet un développement limité au voisinage de 0^+ à l'ordre n et que $f^{(n+1)}$ s'écrit de la façon suivante :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n + o_{x \rightarrow 0^+}(1)$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des réels qu'on ne cherche pas à déterminer.

5. Déduire, en utilisant la question 2. de la partie I, qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que au voisinage de 0^+ on a

$$f^{(n)}(x) = \frac{-a_0}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a_1}{(n-2)x^{n-2}} - \dots - \frac{a_{n-2}}{x} + a_{n-1} \ln x + \ell + o_{x \rightarrow 0^+}(1)$$

6. Dans cette question, on suppose que $f^{(n+1)}$ n'admet pas une limite finie à droite en 0.

(a) Montrer qu'il existe $p \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $a_p \neq 0$ et

$$f^{(n+1)}(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{a_p}{x^{n-p}}$$

(b) Montrer alors que

$$\begin{cases} f^{(n)}(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} a_{n-1} \ln x, & \text{si } p = n-1; \\ f^{(n)}(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{-a_p}{(n-p-1)x^{n-p-1}}, & \text{si } p \in \{0, \dots, n-2\}. \end{cases}$$

7. Déduire alors que si $f^{(n)}$ admet une limite finie à droite en 0 alors $f^{(n+1)}$ admet aussi une limite finie à droite en 0.
8. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.
9. Déterminer, en utilisant la question 2.b. de cette partie, $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.