

Devoir de Synthèse N° 2 : **Analyse**
Durée : 2 H

N.B : La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction entreront en grande partie dans l'appréciation de la copie.

Exercice

1. Dans une population, une maladie fréquente touche une personne sur quatre. Le tiers de la population est vacciné contre cette maladie. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si un individu est touché par la maladie, 0 sinon. Et on pose Y la variable aléatoire qui vaut 1 si un individu est vacciné, 0 sinon. On note $p \in]0, 1[$ la proportion des individus vaccinés parmi les malades.
 - (a) Déterminer les lois de probabilité de X et de Y .
 - (b) Déterminer la loi du couple (X, Y) en fonction de p .
 - (c) Pour quelle valeur de p les deux variables X et Y sont-elles indépendantes ? Pour cette valeur de p que peut-on dire de l'efficacité du vaccin ?
 - (d) On note Π la variable qui vaut 1 si un individu est malade et vacciné, 0 sinon. Exprimer Π en fonction de X et Y et déterminer sa loi en fonction de p .
 - (e) On pose U la variable qui vaut 1 si l'individu est malade ou vacciné, 0 sinon. Exprimer U en fonction de X et Y et déterminer sa loi en fonction de p .
2. Dans une population on remarque la présence de $n \in \mathbb{N}^*$ maladies $M_1, M_2, \dots, M_n$ d'une façon indépendante et avec des fréquences respectives $p_1, p_2, \dots, p_n \in]0, 1[$. On note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si un individu est touché par la maladie M_k , 0 sinon pour $1 \leq k \leq n$. On pose Z le nombre de maladies qui touchent un individu.
 - (a) Exprimer Z en fonction des variables $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$.
 - (b) Quel est le nombre moyen de maladies présentes dans cette population ?
 - (c) Avec quelle condition la variable Z suit-elle une loi binomiale ?

Problème

Des résultats de la partie I serviront à la résolution de la partie II et III. Cependant, les parties II et III sont totalement indépendantes.

Partie I

1. Soit $\alpha > 1$, montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln n}$ converge.

2. (a) Vérifier que la fonction $f : x \rightarrow \frac{1}{x \ln x}$ est décroissante sur $[2; +\infty[$.

(b) En déduire que pour tout $n \geq 2$,

$$\int_2^{n+1} \frac{dx}{x \ln x} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \leq \int_2^{n+1} \frac{dx}{x \ln x} + \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}.$$

(c) Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ est divergente et que $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln n)$.

Partie II :

1. On pose $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k \ln(k)}$ pour $n \geq 2$.

(a) Prouver que les deux sous suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

(b) Quelle est alors la nature de convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}$?

2. Soit a un réel.

(a) Montrer que si $|a| > 1$ alors la série $\sum_{n \geq 2} \frac{a^n}{n \ln(n)}$ diverge.

(b) Montrer que si $|a| < 1$ alors la série $\sum_{n \geq 2} \frac{a^n}{n \ln(n)}$ converge.

Partie III :

On pose $\beta_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} - \ln(\ln(n))$ pour $n \geq 2$.

1. Montrer que

$$\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) = \frac{1}{n \ln(n)} - \frac{1}{2n^2 \ln(n)} + o\left(\frac{1}{n^2 \ln(n)}\right)$$

et que

$$\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} - \frac{1}{n \ln(n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{n^2 \ln(n)}.$$

2. Déduire que : $\beta_{n+1} - \beta_n = \frac{-1}{2n^2 \ln(n)} + o\left(\frac{1}{n^2 \ln(n)}\right)$.

3. Montrer alors que la suite $(\beta_n)_{n \geq 2}$ converge.

-Bon travail-