

* * * * *

**Institut Préparatoire aux Études
d'Ingénieurs de Sfax**

**Epreuve d'Algèbre 1 2017
Sections : MP.1**

Exercice 1

Soit $G = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G défini par :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe.
2. Est-il commutatif ?
3. Montrer que $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

Problème**Partie I**

On considère le polynôme $Q(X) = X^n - 1, n \geq 2$ et $U_n = \{z \in \mathbb{C}; z^n = 1\}$.

1. Montrer que $(U_n, \times)$ est un groupe et déterminer son cardinal.
2. Soient $z \in U_n$ et $p \in \mathbb{Z}$. Montrer que $z^p = 1$ si et seulement si p est un multiple de n .
3. **Définition** : Soient G un groupe et a un élément de G .

On dit que a est générateur de G si et seulement si pour tout x de G il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a^p$, on note $G = \langle a \rangle$.

On suppose dans toute la suite que $a = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

- (a) Montrer que a est un générateur de U_n .
- (b) Soit $k_0 \in \mathbb{Z}$, on pose $H = \langle a^{k_0} \rangle = \{a^{k_0 p}, p \in \mathbb{Z}\}$.
 - i. Montrer que H est un sous-groupe de U_n .
 - ii. Montrer que $H = U_n$ si et seulement si $a \in H$.
 - iii. En déduire que $H = U_n$ si et seulement si il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $a^{k_0 p - 1} = 1$
- (c) Montrer que a^{k_0} est générateur de U_n si et seulement si k_0 et n sont premiers entre eux. (Indication : Utiliser les questions 3) et 2)a).

Partie II

On considère le polynôme $P(X) = (1 + X)^{2p} - (1 - X)^{2p}$, $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer le degré de P et le coefficient dominant de P .
2. En déduire que P admet au moins une racine réelle.
3. Déterminer la somme et le produit de toutes les racines de P .
4. Vérifier que 1 n'est pas une racine de P .
5. Montrer que x est une racine de P si et seulement si $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{2p} = 1$.
6. (a) Déterminer toutes les racines x_k de P .
(b) Comparer x_{2p-k} et x_k pour $k \neq 0$ et $k \neq p$.
(c) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P(X) = \lambda X \prod_{k=1}^{p-1} \left(X^2 + \tan^2\left(\frac{k\pi}{2p}\right)\right)$.
7. Application : Déterminer la valeur de $\prod_{k=1}^{p-1} \left(1 + \tan^2\left(\frac{k\pi}{2p}\right)\right)$.