

Devoir de controle N°1

Durée: 1h

Epreuve: Analyse

Date: 26-10-2017

Exercice :

1. Déterminer une primitive de

$$\frac{1}{1+2x+2x^2}$$

puis une primitive de

$$\frac{x}{1+2x+2x^2}$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$(E) : xy'(x) + y(x) = \frac{x}{1+2x+2x^2}$$

Problème :

On considère l'équation différentielle

$$(E_\varphi) : y''(x) + y(x) = \varphi(x)$$

où y est une fonction à valeurs réelles et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Partie I :

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation homogène associée à (E_φ) .
2. (a) Déterminer les solutions générales de l'équation différentielle (E_{φ_1}) dans le cas où $\varphi_1(x) = x \sin(x)$.
(b) Dédire la solution de l'équation différentielle (E_{φ_1}) qui passe par l'origine avec une tangente horizontale.
3. Déterminer les solutions générales de l'équation différentielle (E_{φ_2}) dans le cas où $\varphi_2(x) = \cos^2(x)$.

Partie II :

Soit T un réel strictement positif.

Dans cette partie, on suppose que φ est T -périodique sur $\mathbb{R}$ et on considère y une solution à valeurs réelles de l'équation différentielle de (E_φ) .

1. Montrer que $u : x \mapsto y(x+T) - y(x)$ est une solution de l'équation homogène associée à (E_φ) .
2. On suppose que $y(T) = y(0)$ et $y'(T) = y'(0)$. Montrer que la fonction u est nulle sur $\mathbb{R}$.
3. Dédire que y est T -périodique si et seulement si $y(T) = y(0)$ et $y'(T) = y'(0)$.
4. Dédire qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E_{φ_2}) (partie I-3), π -périodique, qu'on déterminera.