

Devoir de Synthèse N° 1 : Analyse
Durée : 2H

Exercice : (7 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = e^{-x} - \frac{x-n}{x+n}.$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée α_n .
2. (a) Montrer que $f_{n+1}(x) > f_n(x)$, pour tout $x > 0$.
(b) Montrer que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
(c) Montrer que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente. (**Indication** : raisonner par l'absurde).
3. (a) Déterminer le signe de $f_n(n)$ et déduire que $\alpha_n > n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(b) Montrer que $f_n(n+1) \sim -\frac{1}{2n+1}$ et déduire qu'à partir d'un certain rang $\alpha_n < n+1$.
(c) Déduire un équivalent de α_n puis établir que $(\alpha_n - \frac{1}{2}n)^2 = \frac{1}{4}n^2 + o(n^2)$.

Problème : (13 points)

Une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall m \geq N \text{ et } \forall n \geq N, |U_m - U_n| \leq \varepsilon.$$

Partie I

Dans cette partie, on se propose de montrer qu'une suite réelle est de Cauchy si et seulement si elle est convergente.

1. Montrer que si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente alors elle est de Cauchy.
2. Montrer que si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy alors elle est bornée.
3. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de Cauchy. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{U_m; m \geq n\}$.
(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$.
(b) Justifier que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.
On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \inf(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y_n = \sup(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(c) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N$, $x_n \geq U_n - \varepsilon$ et $y_n \leq U_n + \varepsilon$.

- (d) En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
 (e) En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Partie II

Le but de cette partie est de présenter un exemple d'une suite rationnelle de Cauchy qui converge vers une limite irrationnelle.

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}.$$

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \in \mathbb{Q}$ et que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout $m > n > 2$, on a :

$$|U_m - U_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{m-n-1}} \right).$$

3. En déduire que pour tout $m > n > 2$, on a :

$$|U_m - U_n| < \frac{1}{2n!}.$$

(Indication : on pourra utiliser, sans justifier, le fait que $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{2}$).

4. En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy et qu'elle est convergente.

Soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e$. On suppose que $e = \frac{p}{q}$, avec p et q sont deux entiers strictement positifs et premiers entre eux.

- (a) Montrer que pour tout $n > q$, le nombre $p_n = n!(e - U_n)$ est un entier strictement positif.
- (b) Montrer que pour tout $n > 2$, $p_n < 1$.

(Indication : on pourra écrire $p_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} n!(U_m - U_n)$).

- (c) Conclure que $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Partie III

Le but de cette partie est de présenter un exemple d'une suite réelle qui n'est pas de Cauchy.

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante qui vérifie :

$$\exists a > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{ telle que : } \forall n \geq N, U_{n+1} - U_n \geq \frac{a}{n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{2n} - U_n \geq \frac{a}{2}$.
2. En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy.
3. Déterminer la limite de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
4. Application : déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Bon Travail