

Devoir de Contrôle d'Algèbre - Semestre N°1

Section : M.P.1

Durée : 01 heure

Date : 02 Novembre 2019

Nb de pages : 02

Exercice 1

L'objectif de cet exercice est de montrer la formule suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} C_n^k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

(1) Soit x un réel non nul. Montrer que :

$$\frac{1 - (1-x)^n}{x} = \sum_{p=0}^{n-1} (1-x)^p$$

(2) On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} C_n^k x^k$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = - \sum_{p=0}^{n-1} (1-x)^p$$

(3) En déduire la formule demandée. (Ind : on pourra intégrer f' entre 0 et 1).**Exercice 2**Soient E un ensemble non vide, A une partie non vide de E telle que $A \neq E$.

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} f_A : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\longmapsto f_A(X) = A \cup X \end{aligned}$$

(1) Calculer $f_A(\overline{A})$ et $f_A(E)$. Déduire que f_A n'est pas injective.(2) Montrer que f_A n'est pas surjective.(3) On pose $H = \{\emptyset, A, \overline{A}, E\}$.Déterminer les ensembles suivants : $f_A(H)$, $f_A^{-1}(\{\emptyset\})$, $f_A^{-1}(\{A\})$ et $f_A^{-1}(\{\overline{A}\})$.

(4) On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(E); X \mathcal{R} Y \iff f_A(X) = f_A(Y)$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.

(b) Déterminer les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ de $\emptyset$ et E .

(c) On note $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R} = \{Cl_{\mathcal{R}}(X); X \in \mathcal{P}(E)\}$. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}(E)/\mathcal{R} &\longrightarrow f_A(\mathcal{P}(E)) \\ Cl_{\mathcal{R}}(X) &\longmapsto \varphi(Cl_{\mathcal{R}}(X)) = f_A(X) \end{aligned}$$

est bien définie et bijective.

(5) On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} g_A : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\longmapsto g_A(X) = A \cap X \end{aligned}$$

Soit $B \in \mathcal{P}(E)$. Trouver toutes les parties X de E vérifiant $g_A(X) = B$.

(Ind : on pourra discuter suivant $B \not\subset A$ puis $B \subset A$).

(6) On considère l'application :

$$\begin{aligned} \psi_A : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X &\longmapsto \psi_A(X) = (f_A(X), g_A(X)) \end{aligned}$$

(a) Montrer que ψ_A est injective.

(b) ψ_A est-elle surjective ?