

Exercice

Soient n et p deux entiers naturels non nuls avec $n \geq 2$. On considère le polynôme :

$$P_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n.$$

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .
2. Montrer que les racines complexes de P_n sont $x_k = -i \cotg\left(\frac{k\pi}{n}\right), 1 \leq k \leq n-1$.
3. En déduire la décomposition de P_n en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
4. Calculer la somme et le produit des racines de P_n .
5. En déduire que $\prod_{k=1}^{2p} \cotg\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{(-1)^p}{2p+1}$.
6. Démontrer que $\prod_{k=1}^{2p} \cotg\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = (-1)^p \cdot \left(\prod_{k=1}^p \cotg\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)^2$.
7. Déduire que $\prod_{k=1}^p \tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \sqrt{2p+1}$.
8. a) Montrer que 0 est la seule racine réelle de P_{2p} .
b) Factoriser P_{2p} en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Problème

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère : $Q_n = X^n - 1$ et $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. $\mathcal{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1. a) Montrer que $(\mathcal{U}, \times)$ est un groupe commutatif.
b) Déterminer l'ensemble Γ_n des racines complexes de Q_n . Quel est son cardinal ?
Montrer que c'est un sous-groupe de $(\mathcal{U}, \times)$.
c) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\Gamma_m \cap \Gamma_n = \Gamma_{m \wedge n}$.
2. Soient G un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ de cardinal fini $d \in \mathbb{N}^*$ et $z \in G$.
a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, z^k \in G$.
b) On suppose par l'absurde que $z^d \neq 1$.

Montrer alors que $\forall 0 \leq i \neq j \leq d, z^i \neq z^j$. Déduire que $\text{Card}(G) > d$. Conclure.

- c) Montrer que $G = \Gamma_d$.
- d) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, montrer que $(\Gamma_m = \Gamma_n) \Leftrightarrow (m = n)$.

- e) Déduire que G est un sous-groupe de Γ_n si et seulement si $d|n$. (On pourra utiliser 1.b))
- f) **Application :**
- Déterminer tous les sous-groupes de Γ_6 .
 - Déterminer le nombre de sous-groupes de Γ_{40} .
3. Soit l'application $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{U}$ telle que pour tout rationnel q , $f(q) = e^{iq\pi}$.
- Montrer que f est bien définie c-à-d, $\forall q \in \mathbb{Q}, f(q) \in \mathcal{U}$.
 - Montrer que f est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathcal{U}, \times)$. Chercher son noyau.
 - f est-il injectif? f est-il surjectif?
 - Soit H l'image de f . Montrer l'égalité ensembliste

$$H = \bigcup_{s \in \mathbb{N}^*} \Gamma_s.$$

4. Pour $\omega \in \Gamma_n$, on définit l'application $f_\omega: \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \Gamma_n \\ k \mapsto \omega^k \end{cases}$.
- Montrer que f_ω est morphisme de groupes.
 - Soit $E = \{k \in \mathbb{N}^* ; \omega^k = 1\}$. Montrer que E admet un plus petit élément que l'on note r . Cet entier est appelé **ordre de ω** dans le groupe Γ_n , on le note par $r = o(\omega)$.
 - Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}, (\omega^k = 1) \Leftrightarrow (r \text{ divise } k)$. Déduire que r divise n .
 - Montrer que $\text{Ker}(f_\omega) = r\mathbb{Z}$.
 - Montrer que $\text{Im}(f_\omega) = \{1, \omega, \dots, \omega^{r-1}\}$.
 - Déduire que $\text{Im}(f_\omega) = \Gamma_r$.
 - Etablir que f_ω est surjectif si et seulement si $o(\omega) = n$.
 - Application .**

Déterminer l'ordre de chacun des éléments de Γ_6 .