

Devoir de contrôle N° 1 : **Analyse**
 Durée : 1H

Exercice :

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E_m) : (1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + my = 0,$$

où m est un paramètre réel et $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable.

1. Montrer que y est solution de (E_0) si et seulement si $(1+x^2)y' = \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Donner alors l'ensemble de solutions de (E_0) .
3. Soit $m \neq 0$. Pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose $z(\theta) = y(\tan(\theta))$.
 - (a) Montrer que y est solution de (E_m) si et seulement si z est solution de l'équation $(E'_m) : z'' + mz = 0$.
 - (b) Résoudre (E'_m) selon les valeurs de m .
 - (c) Déterminer alors l'ensemble de solutions de (E_m) .

Problème :

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que pour tout $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(\star) : f(xy) = xf(y) + yf(x).$$

Soit $f \in \mathcal{E}$.

1. (a) Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
 (b) Dédire alors que la fonction f est impaire.
2. On suppose, dans cette question, que f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
 (a) Démontrer que f est solution, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle :

$$(E_1) : xf'(x) - f(x) = f'(1)x,$$

(Ind : dériver par rapport à y en gardant x fixé dans la condition $(\star)$).

- (b) Résoudre l'équation différentielle du premier ordre (E_1) , sur $]0, +\infty[$.
- (c) En déduire l'expression de $f(x)$, en fonction de la constante $f'(1)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. On note F la primitive de f qui s'annule en 0.
 - (a) Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(xy) = x^2F(y) + \frac{xy^2}{2}f(x)$.
 - (b) En déduire que f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.