

Devoir de synthèse N°1

Durée: 2h

Epreuve: Analyse

Date: 07-01-2020

Problème :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $f_\lambda : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + \lambda$, et on définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}, \\ x_{n+1} = f_\lambda(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Partie I :

Dans cette partie on étudie la nature de convergence de la suite (x_n) selon les valeurs de λ .

On rappelle que x est un point fixe de f_λ si $f_\lambda(x) = x$.

1. Montrer que f_λ admet au plus deux points fixes qu'on déterminera (s'ils existent) en fonction de λ et qu'on notera a_λ et b_λ avec $a_\lambda \leq b_\lambda$ et étudier le signe de la fonction $g_\lambda : x \in \mathbb{R} \mapsto f_\lambda(x) - x$ suivant les valeurs de λ .
2. Si la suite (x_n) converge quelles sont les valeurs possibles de sa limite ?
3. Montrer que si $\lambda > \frac{1}{4}$ alors la suite (x_n) est croissante et déterminer sa limite.
4. On suppose que $\lambda \leq \frac{1}{4}$.
 - (a) Si $x_0 > b_\lambda$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > b_\lambda$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.
 - (b) Si $x_0 < -b_\lambda$, vérifier que $x_1 > b_\lambda$ et déduire la nature de convergence de (x_n) ainsi que sa limite éventuelle.

Partie II :

On suppose dans cette partie que $\lambda = \frac{1}{4}$. On se propose d'étudier la vitesse de convergence ou de divergence de la suite (x_n) .

1. Montrer que (x_n) converge si, et seulement si, $x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et qu'en cas de convergence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_n - \frac{1}{2}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

3. On suppose que $u_0 \in]-1, 0[$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

- (a) Justifier que (v_n) est bien définie.
- (b) Montrer que (v_n) converge vers une limite non nulle ℓ que l'on précisera.

(c) On rappelle le **théorème de Césaro** :

Si la suite (v_n) converge vers ℓ alors $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k$ converge aussi vers ℓ .

Utiliser le théorème de Césaro pour déterminer un équivalent simple de (u_n) .

4. On suppose que $u_0 \notin [-1, 0]$.

(a) Vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$.

(b) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} - w_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$.

(c) Dédurre que la suite (w_n) converge. On note γ sa limite.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $w_{n+p+1} - w_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$.

(e) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n(\gamma - w_n) = 0$. (Ind : écrire $2^n(\gamma - w_n) = \lim_{p \rightarrow +\infty} 2^n(w_{n+p+1} - w_n)$)

(f) Dédurre qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha^{2^n}$.

Exercice :

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

On dit que A est un **ouvert** de $\mathbb{R}$ si :

$$\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 /]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A.$$

On dit que A est un **fermé** de $\mathbb{R}$ si son complémentaire dans $\mathbb{R}$, A^c , est un ouvert de $\mathbb{R}$.

1. Quelques propriétés des ouverts et fermés :

(a) Si A est un ouvert, montrer que A n'admet pas un minimum.

(b) Si A est un fermé et $(a_n)_n$ une suite d'éléments de A convergente vers une limite ℓ , montrer que $\ell \in A$.

(c) Si A est un fermé minoré, montrer que A admet un minimum.

2. On se propose dans cette question de montrer que si A est à la fois un ouvert et un fermé de $\mathbb{R}$ alors $A = \mathbb{R}$. On suppose alors que A est à la fois un ouvert et un fermé de $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que A n'est pas minorée.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $\Omega_\lambda = \{x \in A; x < \lambda\}$.

i. Justifier que Ω_λ admet une borne supérieure. On pose $a = \sup(\Omega_\lambda)$.

ii. Montrer que $a \in A$.

iii. Dédurre que $a = \lambda$. (Ind. utiliser le fait que A est ouvert)

(c) Dédurre que $A = \mathbb{R}$.