

Examen de la fin du 1^{er} Semestre
Physique

Samedi 04 Janvier 2020

- Les résultats littéraires devront être encadrés.
- Les résultats littéraires non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.
- Les calculatrices sont autorisées.

Exercice 1 : Modèle atomique de Thomson

En 1904, le physicien anglais Joseph John Thomson proposa de présenter l'atome d'hydrogène par un nuage sphérique de centre O, de rayon R et de charge $+e$ uniformément répartie. A l'intérieur de cette sphère, fixe dans le référentiel du laboratoire, se déplace librement un électron de masse ponctuelle m et de charge $-e$. Le référentiel du laboratoire $R_L(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est assimilé un référentiel galiléen.

En l'absence de toute action extérieure, l'électron M est soumis à une unique force d'origine électrostatique qui tend à attirer vers le point O : $\vec{F} = -k\vec{OM}$; avec $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^3}$.

Cette force se comporte comme une force de rappel élastique due à un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle, dont l'autre extrémité serait fixée en O.

A l'instant $t = 0$, une perturbation écarte légèrement l'électron de sa position d'équilibre avec les conditions initiales : $\vec{OM}(t = 0) = \vec{OM}_0 = r_0\vec{e}_x$ et $\vec{v}(t = 0) = \vec{v}_0 = v_0\vec{e}_y$.

Données : $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ (SI)}$; Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$.

Remarque : La position de M est donc repérée dans les bases $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ avec comme vecteurs positions respectives : $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ et $\vec{OM} = r\vec{e}_r$.

On note aussi que l'équation d'une ellipse s'écrit en coordonnées cartésiennes avec origine en O, d'axes de symétrie Ox et Oy comme suit : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

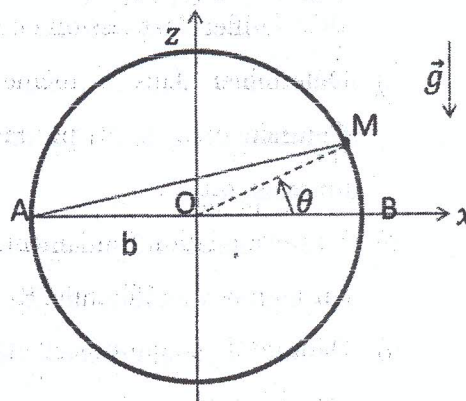
- 1) Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique en O de l'électron et déterminer sa valeur en fonction de r_0, v_0 et m . En déduire que son mouvement reste confiné dans le plan (Oxy).
- 2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement de l'électron, en déduire l'équation horaire $r(t)$.
- 3) Exprimer la pulsation ω_0 du mouvement de M en fonction de ϵ_0, e, m et R . Calculer la valeur de R pour laquelle cette pulsation ω_0 correspond à la fréquence N_0 d'une des raies du spectre de Lyman de l'atome d'hydrogène ($\lambda_0 = 121.8 \text{ nm}$). On rappelle la relation $N_0 \lambda_0 = c$.
- 4) Déterminer les expressions de $x(t)$ et $y(t)$. Montrer que la trajectoire du point M est une ellipse (ellipse de Hooke) dont vous préciserez les longueurs a et b des demi-axes.
- 5) A quelle condition cette trajectoire est-elle circulaire ? Que se passe-t-il si $v_0 = 0$?
- 6) L'électron accéléré perd de l'énergie par rayonnement. Pour tenir compte de ce phénomène, une force supplémentaire de freinage est introduite. Elle a la forme d'une force de frottement de type visqueux $\vec{f} = -h\vec{v}$ où h , le coefficient de freinage, est positif.
- 7) Quelle est l'évolution du moment cinétique en O de l'électron au cours du temps ?
- 8) Dire qualitativement ce que sera le mouvement de l'électron pour de faibles amortissements.

Commenter quant à la stabilité de l'atome.

Exercice 2 :

Le référentiel terrestre $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

Un anneau ponctuel M de masse m est enfilé sur un cercle fixe de centre O et de rayon b placé verticalement dans le plan (Oxz). Il est susceptible de glisser sans frottement le long de ce guide circulaire et est soumis au champ de pesanteur terrestre supposé uniforme. La résistance de l'air est négligeable.



Une force $\vec{T} = -k\vec{AM}$ tend à attirer l'anneau M vers le point A (voir figure). Cette force se comporte comme une force de rappel élastique dirigée vers A.

- 7) Déterminer l'énergie potentielle $E_p(\theta)$ dont dérive la force résultante dans R. On prendra $E_p(\theta = 0) = -mgb$.
- 8) Représenter, dans l'intervalle $[-\pi, +\pi]$, la courbe de variation de l'énergie potentielle $E_p(\theta)$ puis déduire les positions d'équilibre θ_e ainsi que leur stabilité.
- 9) Déterminer l'énergie mécanique E_m de M dans le référentiel R puis retrouver la même équation différentielle régissant le mouvement du mobile M. Commenter.
- 10) Pour une énergie $E_m < mgb$, montrer graphiquement que M est piégé dans un intervalle borné de θ (puits de potentiel).

Exercice 4 :

On considère une particule ponctuelle M de masse m dont la position est repérée par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans un référentiel R galiléen de repère (Oxyz). Sa vitesse dans R est notée $\vec{v}$. La particule est plongée dans un champ de force dérivant du potentiel $E_p(r) = -\frac{\alpha}{r}$ avec $\alpha > 0$.

- 1) Montrer que $\vec{L}_0$, le moment cinétique de M par rapport à O dans R, est un vecteur constant. Exprimer L_0 en fonction de m, r et $\dot{\theta}$.
- 2) Montrer que l'énergie $E_m = E_c + E_p(r)$ est une constante du mouvement. Exprimer E_m en fonction de $r, \dot{r}, \dot{\theta}, m$ et α .
- 3) Montrer que le vecteur $\vec{A} = \vec{v} \wedge \vec{L}_0 - \alpha \frac{\vec{r}}{r}$ est un vecteur constant.
- 4) Comment sont disposés l'un par rapport à l'autre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{L}_0$? Quelles sont les coordonnées polaires A_r et A_θ de $\vec{A}$.
- 5) Nous prendrons $\vec{e}_x$ suivant $\vec{A}$ (soit $A_x = A$). Montrer que dans ces conditions $r, \dot{\theta}$ et $\dot{r}$ peuvent être exprimés comme des fonctions de la seule variable θ et des paramètres L_0, A, m et α . Donner ces expressions. Déduire l'expression de r ?

★★★