

Devoir de Contrôle d'Algèbre - Semestre N°2
Section : M.P.1

Durée : 01h 30 mn

Date : 08 Juillet 2020

Nb de pages : 02

Exercice 1

Soit

$$f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$$

$$P \longmapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$$

1. (i) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
 (ii) Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $f(X^k)$.
 (iii) Calculer $\deg(f(X^k))$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.
 (i) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par $f : f(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

On pose

$$g : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$$

$$P \longmapsto f(P)$$

- (ii) Montrer que $\text{Im}(g) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Dédire $\text{rg}(g)$.
 (iii) Montrer que $\ker(g) = \mathbb{R}_1[X]$.
3. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P(0) = P'(0) = 0\}$.
 (i) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Donner une base et calculer sa dimension.
 (ii) Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = F \oplus \ker(g)$.
 (iii) En déduire que

$$\tilde{g} : F \longrightarrow \text{Im}(g)$$

$$P \longmapsto \tilde{g}(P) = g(P)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

- (iv) Montrer que f est surjective et non injective.
- (v) En déduire que $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

Exercice 2

Definitions et notations

- On désigne par $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E .
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note par $f^{k+1} = f^k \circ f$ avec $f^0 = id_E$ où id_E est l'application identité de E .

Soit f un endomorphisme de E tel que

$$f^2 - f - 6id_E = 0 \quad (1)$$

1. Existe-t-il des projecteurs p ou des symétries s de E vérifiant (1)
2. Déterminer les homothéties de E vérifiant (1).
3. a) Vérifier que $(f - 3id_E) \circ (f + 2id_E) = (f + 2id_E) \circ (f - 3id_E) = 0$.
b) En déduire que $Im(f - 3id_E) \subset Ker(f + 2id_E)$ et que $Im(f + 2id_E) \subset Ker(f - 3id_E)$.
c) En déduire que $E = Ker(f - 3id_E) \oplus Ker(f + 2id_E)$.
4. Soient p la projection sur $Ker(f - 3id_E)$ parallèlement à $Ker(f + 2id_E)$ et q la projection sur $Ker(f + 2id_E)$ parallèlement à $Ker(f - 3id_E)$.
a) Vérifier que $p = \frac{1}{5}(f + 2id_E)$ et que $q = -\frac{1}{5}(f - 3id_E)$
b) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n = 3^n p + (-2)^n q \quad (2)$$

5. a) Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer l'expression de f^{-1} en fonction de f et de id_E .
b) La relation (2) est-elle vraie pour $n = -1$?

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $rg(A) = 1$ si, et seulement si, ils existent $U, V \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tels que $A = U {}^t V$.
2. Supposons que A est de rang égal à 1, en déduire alors la trace de A en fonction des coordonnées de U et V .
3. Montrer que $A^2 = 0$ si, et seulement si, $rg(A) \leq 1$ et $tr(A) = 0$.

★ ★ ★ ★ Bon Travail ★ ★ ★ ★