

INSTITUT PREPARATOIRE  
AUX ETUDES D'INGENIEURS  
DE SFAX

Département de la Préparation  
Mathématiques Physique  
Section MP1

Devoir de contrôle d'Algèbre MP1

---

Durée : 1 h    Date : 26-01-2021    Nb pages : 2

---

*Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement,  
à la clarté et au soin de la présentation.*

**Exercice 1 :**

Soit  $n \geq 2$ .

1. Montrer que

$$\text{pgcd}(2^{8n} - 3^{2n} + 13, 2^{4n} - 3^n) = \text{pgcd}(2^{4n} - 3^n, 13).$$

2. Montrer que 13 divise  $2^{4n} - 3^n$ .

3. En déduire la valeur de

$$\text{pgcd}(2^{8n} - 3^{2n} + 13, 2^{4n} - 3^n).$$

**Exercice 2 :** On considère la suite numérique  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$a_0 = 1 \text{ et si } n \geq 2, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!} = 0.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k \frac{X^{n-k}}{(n-k)!}$ .

1. Calculer  $a_1$  et  $a_2$ . Ecrire explicitement les polynômes  $A_0$ ,  $A_1$  et  $A_2$ .
2. Montrer que  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est l'unique suite de polynômes vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \ A_0 = 1 \\ \text{(ii)} \ \text{Pour tout entier } n \geq 1, \ A'_n = A_{n-1}, \\ \text{(iii)} \ \text{Pour tout entier } n \geq 2, \ A_n(0) = A_n(1). \end{array} \right.$$

3. En utilisant la question précédente, montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A_n(1-X) = (-1)^n A_n(X).$$

4. Soit  $n = 2l + 1$  un entier impair  $\geq 3$  ( $l \in \mathbb{N}^*$ ).

(a) Montrer que le polynôme  $A_{2l+1}$  est divisible par  $X(X-1)(2X-1)$ .

(b) En déduire que  $a_{2l+1} = 0$ .

5. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $P_n = A_n(X+1) - A_n(X)$ .

(a) Montrer que pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n$  est un polynôme de degré  $n-1$  et de coefficient dominant  $\frac{1}{(n-1)!}$ .

(b) Montrer que pour  $n$  entier  $\geq 2$ ,

$$P_n^{(k)}(0) = 0, \text{ pour tout } k \in \{0, \dots, n-2\}.$$

(c) En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$A_n(X+1) - A_n(X) = \frac{1}{(n-1)!} X^{n-1}.$$

6. Pour  $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , on pose  $S_n(m) = \sum_{k=1}^m k^n = 1^n + 2^n + \dots + m^n$ .

(a) Montrer que  $S_n(m) = n!(A_{n+1}(m+1) - A_{n+1}(0))$ .

(b) En déduire  $S_n(m)$  en fonction de  $A_{n+1}(m+1)$  et  $a_{n+1}$ .