

Examen fin du premier semestre (Analyse)

Date: 30/1/2021 _____ Durée: 1h30mn _____ Nombre de pages: 2

N.B. Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Exercice: (5 points)

(1) Donner le domaine de définition puis simplifier l'expression de $f(x) = \tan(\arcsin(x))$.

(2) Calculer sur $] -1, 1[$, l'expression de $g(x) = \int \frac{dx}{(\sqrt{1-x^2})^3}$.

(Indication: utiliser le changement de variable $x = \sin(t)$ où $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$).

(3) On considère l'équation différentielle suivante: $(E) : y'(x) + \frac{x}{1-x^2}y(x) = \frac{2021}{1-x^2}$ où $y :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

(a) Donner la solution générale de l'équation différentielle homogène associée à (E) .

(b) En utilisant la méthode de la variation de la constante, trouver une solution particulière de l'équation (E) .

(c) En déduire la solution générale de l'équation (E) .

Problème: (15 points)

• Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Le but de ce problème est de démontrer que l'ensemble $A = \{\tan(n!\pi\alpha) \text{ tel que } n \in \mathbb{N} \text{ et } \alpha \in I \text{ avec } (n!\alpha - \frac{1}{2}) \notin \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Pour cela, soit $y \in \mathbb{R}$.

(1) Justifier qu'il existe un unique réel $x \in \left[0, \frac{1}{2} \left[\cup \right] \frac{1}{2}, 1 \right[$ tel que $y = \tan(\pi x)$.

• Pour ce réel x , on considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{E(kx)}{k!}$ où E désigne la fonction partie entière.

(2) Vérifier que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

(3) Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel qu'on notera β . (On admettra ici que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq e$).

(4) Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq n + 3$.

(a) Montrer que: $\frac{E((n+1)x)}{(n+1)!} \leq U_p - U_n \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{E((n+1)x)}{(n+1)} + \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{p-1} \frac{1}{k(k-1)} \right)$.

- (b) Déterminer les réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}, \frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$.
- (c) En déduire que: $\frac{E((n+1)x)}{n+1} \leq n!(U_p - U_n) \leq \frac{E((n+1)x)}{n+1} + \frac{2}{n+1} - \frac{1}{p-1}$,
 puis que: $\frac{E((n+1)x)}{(n+1)} \leq n!(\beta - U_n) \leq \frac{E((n+1)x)}{(n+1)} + \frac{2}{n+1}$.
- (d) Vérifier que la suite $\left(\frac{E(nx)}{n}\right)_{n \geq 1}$ est convergente vers une limite que l'on déterminera.
- (e) Déduire alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n!(\beta - U_n) = x$.
- (5) (a) Justifier qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall n \geq n_0, n!(\beta - U_n) \in \left[0, \frac{1}{2} \left[\cup \right] \frac{1}{2}, 1 \right[$.
- (b) Vérifier que: $\forall n \in \mathbb{N}, n!U_n \in \mathbb{N}$ puis déduire que: $\forall n \geq n_0, \left(n!\beta - \frac{1}{2}\right) \notin \mathbb{Z}$.
- (6) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan(n!\pi\beta) = y$.
- (7) Soient $c, d \in I$ tels que $c < d$.
- (a) Justifier qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $c < \beta + r < d$ et $\beta + r \in I$.
- (b) Justifier qu'il existe un rang $n_1 \geq n_0$ tel que $\forall n \geq n_1$, on a:
 $n!r \in \mathbb{Z}$ et $\left(n!(\beta + r) - \frac{1}{2}\right) \notin \mathbb{Z}$ et $\tan(n!\pi(\beta + r)) = \tan(n!\pi\beta)$.
- (8) Déduire de ce qui précède que l'ensemble $A = \{\tan(n!\pi\alpha) \text{ tel que } n \in \mathbb{N} \text{ et } \alpha \in I \text{ avec } (n!\alpha - \frac{1}{2}) \notin \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Bon travail