

Devoir de Synthèse n°1
Epreuve de Physique

- L'usage des calculatrices est autorisé.
 - Les exercices sont indépendants.
 - Les résultats littéraux devront être encadrés.
 - Toute application numérique ne comportant pas d'unité sera considérée comme fausse.
 - Les résultats littéraux non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.
- N. B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.



EXERCICE

La planète de Mars de masse ($m_M = 6,4 \cdot 10^{23}$ kg) et de rayon ($r_M = 3400$ km) possède deux lunes (Phobos et Deimos) qui effectuent une trajectoire circulaire dans son plan équatorial, à des distances différentes ; Phobos de masse (m_P) se situe à la distance $d_P = 5978$ km de la surface de Mars tandis que Deimos de masse (m_D) est plus éloignée, située à $d_D = 20059$ km. Phobos étant la plus proche, elle fait un tour complet autour de Mars en une période $T_P = 7$ heures et 39 minutes et Deimos en une période $T_D = 30$ heures et 18 minutes.

1°/ La rotation de ces deux lunes autour de Mars étant uniforme, trouver la vitesse angulaire de chaque lune de Mars ω_P et ω_D relatives à Phobos et Deimos. Dédurre leurs vitesses linéaires. On notera V_P et V_D les vitesses linéaires respectives de Phobos et Deimos.

2°/ Sachant que l'effort résultant soumis à chaque lune, de masse m et de rayon r , est purement gravitationnel et uniforme, il obéit à la loi de l'attraction universelle de Newton :

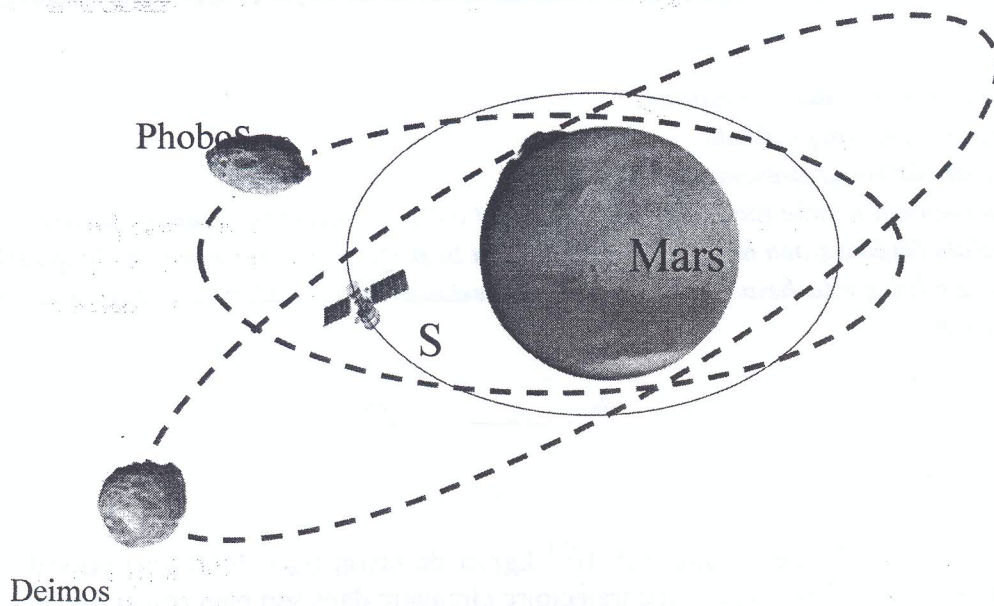
$$\vec{F}_g = -\frac{Gm_M m}{r^2} \vec{u}_r$$

Etablir le principe fondamental de la dynamique relativement au mouvement de chaque lune, déduire les expressions de l'accélération et de la vitesse linéaire en fonction de la constante G , le rayon de la trajectoire r de la lune et la masse de Mars m_M .

3°/ Retrouver les vitesses linéaires de chacune des lunes Phobos et Deimos. On donne $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

4°/ Etablir les expressions des énergies cinétique et potentielle d'une lune de masse m et distant de r . Dédurre l'expression de l'énergie mécanique E_m .

5°/ Un satellite S, de masse $m_S = 1042 \text{ kg}$, suit à son tour une orbite circulaire et géostationnaire (satellite fixe par rapport à la planète de Mars). Ce satellite est placé à une distance de la surface de Mars $d_S = 4600 \text{ km}$. À la suite d'une bouffe d'énergie ΔE à l'instant donné t_0 , ce satellite subit une déviation de manière qu'il poursuit Phobos sur son orbite. Calculer ΔE .



PROBLEME

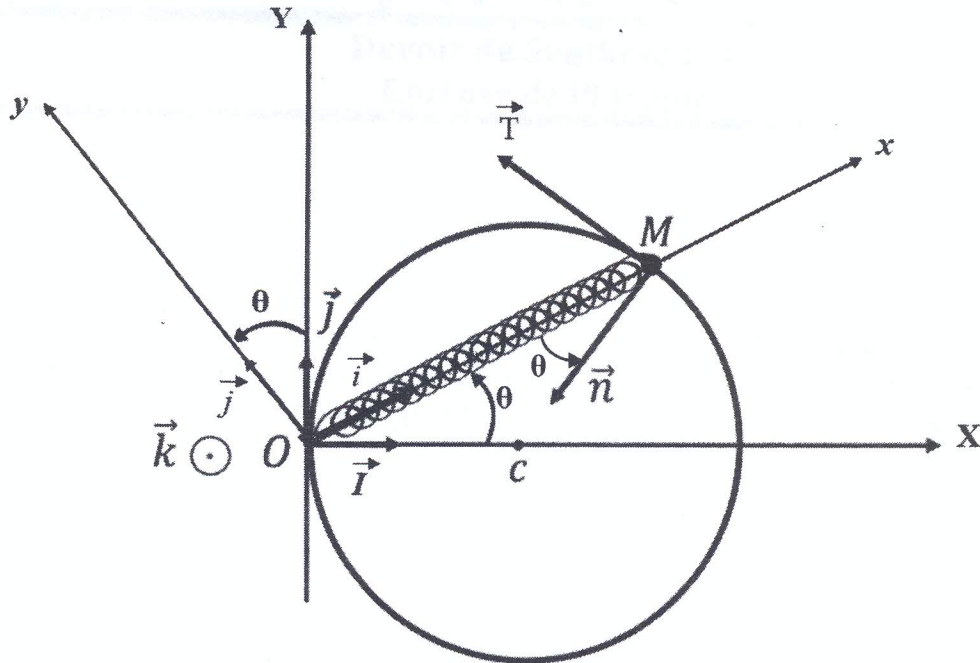
Soient $R (O, X, Y, Z)$ un référentiel absolu muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $R_1 (O, x, y, z)$ un référentiel relatif muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. R_1 tourne autour de l'axe (OZ) avec la vitesse angulaire ω telle que $\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega \vec{k}$, $\omega = \dot{\theta}(t)$ tel que $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ et $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$. Dans le plan horizontal (xOy) de R_1 , une tige circulaire de rayon b et de centre C est maintenue fixe. Un anneau M de masse m est assujéti à se déplacer sans frottement sur la tige circulaire. Il est repéré dans R_1 par $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$ avec $x = 2b \cos(\theta)$.

L'anneau est attaché à l'extrémité d'un ressort de raideur K et de longueur à vide b . L'autre extrémité du ressort est fixée au point O . En plus de la force de rappel $\vec{F}$ exercée par le ressort, l'anneau est soumis à la réaction de la tige $\vec{R}$ et à son poids $\vec{P} = -mg\vec{k}$.

Tous les vecteurs sont exprimés dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1°/ a/ Calculer la vitesse absolue $\vec{V}_a$ de M par rapport au référentiel absolu R et déduire le vecteur tangent à la trajectoire $\vec{T}$.
b/ Calculer l'accélération $\vec{a}$ de M par rapport au référentiel absolu R .

c/ Calculer les composantes de l'accélération tangentielle a_t et normale a_n , en déduire le rayon de courbure R_c . On posera $\vec{n} = -\frac{\vec{CM}}{\|\vec{CM}\|}$ le vecteur unitaire normal à la trajectoire.



- 2°/ a/ Calculer $\vec{L}_C(M)$ le moment cinétique par rapport au point C de M dans R.
b/ Calculer les moments par rapport à C des forces appliquées à M dans R.
c/ Trouver l'équation différentielle du mouvement de M dans le référentiel R.
- 3°/ Soit $E_p(M)$ l'énergie potentielle de l'anneau.
a/ En prenant $E_p(M_0) = 0$ avec $OM_0 = b$, montrer que $E_p(M) = \frac{1}{2}kb^2(2\cos(\theta) - 1)^2$.
b/ Donner l'expression de l'énergie mécanique $E_m(M)$ de l'anneau.
c/ Retrouver l'équation différentielle du mouvement de M dans R.
d/ Déterminer, lorsqu'elles existent, les positions d'équilibre de l'anneau M.
e/ Etudier la stabilité des équilibres obtenus.
- 4°/ a/ Dans une considération relative du mouvement de M dans le référentiel relatif R_1 , trouver les expressions des accélérations relative $\vec{a}_r$, d'entraînement $\vec{a}_e$ et de Coriolis $\vec{a}_c$.
b/ Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans le référentiel relatif R_1 .
c/ En projetant sur le vecteur tangent $\vec{T}$, donner l'équation différentielle du mouvement de M dans R_1 . Commenter.
d/ Que devient cette équation pour des faibles valeurs de θ .
e/ En projetant sur les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{n}$, trouver les composantes de la réaction $\vec{R}$.