

Devoir de contrôle d'Algèbre - Symètre N°2
Section : M.P1 Durée : 1h**Exercice 1**

On pose : $F(X) = \frac{1}{X^4 + X^6}$

- (1) Vérifier que F est paire.
- (2) Décomposer, en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, la fraction rationnelle $F(X)$.
- (3) En déduire la valeur de : $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 F(t)dt$.

Exercice 2

Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $E_p = \mathbb{R}_{2p+1}[X] =: \{P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) \leq 2p+1\}$ et id l'application identité du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E_p .

On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : E_p &\longrightarrow E_p \\ P = \sum_{k=0}^{2p+1} a_k X^k &\mapsto \varphi(P) = \sum_{k=0}^{2p+1} a_{2p+1-k} X^k \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E_p .
2. Vérifier que $\varphi \circ \varphi = id$. Déduire que φ est un automorphisme de E_p .
3. (a) Soit $P \in E_p$. On suppose que $P = P_1 + P_2$, avec
 $P_1 \in \ker(\varphi - id)$ et $P_2 \in \ker(\varphi + id)$.

Montrer que

$$P_1 = \frac{P + \varphi(P)}{2} \text{ et } P_2 = \frac{P - \varphi(P)}{2}.$$

(b) Déduire que $E_p = \ker(\varphi - id) \oplus \ker(\varphi + id)$.

4. Dans cette question, on prend $p = 1$, donc $E_1 = \mathbb{R}_3[X]$ et, pour tout $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, on a : $\varphi(P) = a_3 + a_2X + a_1X^2 + a_0X^3$.

(a) Montrer que

$$\ker(\varphi - id) = \{P \in E_1; \varphi(P) = P\} = Vect(1 + X^3, X + X^2).$$

(b) Donner une base de $\ker(\varphi - id)$.

5. (a) Soit $P = \sum_{k=0}^{2p+1} a_k X^k \in E_p$. Montrer que

$$P \in \ker(\varphi - id), \text{ signifie que } a_k = a_{2p+1-k}, \forall k \in \{0, \dots, 2p+1\}.$$

(b) Déduire que

$$\ker(\varphi - id) = Vect(X^k + X^{2p+1-k}, k \in \{0, \dots, p\}).$$

(c) Donner une base de $\ker(\varphi - id)$.