

Devoir surveillé du 2^{ème} semestre en Analyse

Date: 30/3/2021 _____ Durée: 1h _____ Nombre de pages: 2

N.B. Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1 (12 points)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on définit sur $\mathbb{R}^*$ la fonction F par: $F(x) = \frac{f(x)}{x}$.

On se propose de montrer que F se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la dérivée d'ordre n sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x}$.

(2) Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $F^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (-x)^k f^{(k)}(x)$.

(3) (a) Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction f à l'ordre n , montrer qu'il existe un réel $c_{x,n}$ entre 0 et x tel que:

$$f(0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (-x)^k + \frac{f^{(n+1)}(c_{x,n})}{(n+1)!} (-x)^{(n+1)}.$$

(b) En utilisant ce qui précède, vérifier que pour tous $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel $c_{x,n}$ entre 0 et x tel que: $F^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_{x,n})}{n+1}$.

(c) Dédurre pour tout $n \in \mathbb{N}$, la limite lorsque x tend vers 0 de $F^{(n)}(x)$.

(4) Montrer alors que F se prolonge en une fonction G de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera et donner la valeur de $G^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (8 points)

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et il existe une fonction polynômiale $P(x)$ à coefficients réels et de degré impair vérifiant:

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$$

(1) (a) Soit une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que g est continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Montrer que $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(b) Dédurre qu'un polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins une racine réelle.

(c) Dédurre alors qu'il existe un réel a tel que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$.

(2) (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|f(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec a est le réel mentionné dans la question précédente.

(b) En déduire que f est la fonction nulle.

(c) Justifier à l'aide d'un contre-exemple que le résultat de la question précédente ne reste pas vrai si on suppose que P est de degré pair au lieu de impair.

Bon travail