

Devoir d'Algèbre - Semestre N°1

Section : M.P.1

Durée : 1 Heure

Date : Octobre 2021

Exercice 1

Soit p un entier naturel et θ un réel non multiple entier de 2π (C'est à dire $\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.)

On note $\sum_{k=-n}^n e^{ik\theta} = e^{-in\theta} + \dots + e^{-i\theta} + 1 + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta}$.

1. (a) Vérifier que $\sum_{k=-n}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{2n} e^{i(k-n)\theta}$.

(b) Dédurre que $\sum_{k=-n}^n e^{ik\theta} = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}$.

(c) Calculer alors, $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$.

2. On se propose de montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{p=0}^n \sum_{k=-p}^p e^{ik\theta} = \sum_{k=-n}^n \alpha_{k,n} e^{ik\theta}, \text{ où } \alpha_{k,n} = n + 1 - |k|.$$

(a) Justifier le résultat pour $n = 0$.

(b) Expliciter $\alpha_{k,n+1}$ en fonction de $\alpha_{k,n}$, pour tout $k \in \{-n, \dots, n\}$ et donner $\alpha_{-(n+1), (n+1)}$ et $\alpha_{(n+1), (n+1)}$.

(c) En déduire que $\alpha_{k,n} = n + 1 - |k|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{-n, \dots, n\}$.

3. (a) Montrer que $\sum_{p=0}^n \sin\left((p + \frac{1}{2})\theta\right) = \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}$

(b) Dédurre que $\sum_{k=-n}^n (1 - \frac{|k|}{n}) e^{ik\theta} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \right)^2$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ deux matrices carrées d'ordre n .

On note $AB = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $BA = (c'_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

(a) Rappeler c_{ij} et c'_{ij} pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$.

(b) Donner c_{ij} et c'_{ij} lorsque $B = {}^t A$.

2. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); {}^t A A = I_n\}$.

(a) Vérifier que $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

(b) Justifier que, pour tout $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, A est inversible et donner A^{-1} .

(c) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $A^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $-A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

(d) Montrer que, pour tout $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $AB \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

(a) Pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, trouver les sommes : $\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2$ et $\sum_{k=1}^n a_{k,j}^2$.

(b) Dédurre que pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $|a_{i,j}| \leq 1$.

4. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}); A \text{ est à coefficients dans } \mathbb{Z}\}$.

(a) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{Z})$.

i. Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\exists j_i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a_{ij_i} = \pm 1$ et $a_{ij} = 0$, pour tout $j \neq j_i$.

ii. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, $a_{kj_i} = 0$.

(b) Ecrire les éléments de $\mathcal{O}_2(\mathbb{Z})$.

(c) Dédurre que le nombre d'éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbb{Z})$.