

Devoir de contrôle N°1

Durée: 1h

Epreuve: Analyse

Date: 19-10-2021

N.B. Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f .
2. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
(b) Déterminer sur $]0, +\infty[$, l'expression de $A(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$
(**Indication** : Utiliser le changement de variable $t = \sqrt{x}$).
(c) En déduire une expression plus simple de $f(x)$ pour tout $x \geq 0$.
3. (a) Montrer pour $x \geq 0$, il existe un seul réel $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan^2 \theta = x$.
(b) En utilisant l'expression initiale de f (et non pas celle trouvée dans (2)(c)),
calculer $f(\tan^2 \theta)$ pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$.
(c) Retrouver alors l'expression simplifiée de $f(x)$ obtenue dans la question (2)(c).
4. Soit $x > 0$. Donner l'expression de $f(\frac{1}{x})$ en fonction de $f(x)$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = \sin(\ln x), \quad x \in]0, +\infty[$$

où $y :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

Pour $x > 0$, on pose $I(x) = \int \frac{\sin(\ln x)}{x^2} dx$ et $J(x) = \int \frac{\cos(\ln x)}{x^2} dx$.

1. En utilisant une double intégration par parties, déterminer l'expression de $I(x)$ puis celle de $J(x)$.
2. Soit $y :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2-fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et on considère la fonction z définie sur $]0, +\infty[$ par $z(x) = xy'(x) - y(x)$.

- (a) Montrer que y est une solution de (E) si et seulement si z est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$(F) \quad xz'(x) - z(x) = \sin(\ln x), \quad x \in]0, +\infty[.$$

- (b) Résoudre l'équation différentielle (F) .

- (c) En déduire les solutions générales de l'équation différentielle (E) .

Bon travail