

Examen fin du premier semestre (Analyse)

Date: 16/12/2021 _____ Durée: 2h _____ Nombre de pages: 2

N.B. Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Problème

• À toute suite réelle $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ (où $n_0 \in \mathbb{N}$), on associe la suite $(S_n(u))_{n \geq n_0}$ définie par:
 $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0$, $S_n(u) = \sum_{k=n_0}^n u_k$. De plus, lorsque la suite $(S_n(u))_{n \geq n_0}$ est convergente, on pose $s(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(u)$.

Partie 1

 (9 points)

Dans cette partie, on considère deux suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (1) Vérifier que si la suite $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (**Ind.** regradier $S_n(u) - S_{n-1}(u)$ où $n \geq 1$)
- (2) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et considérons la suite $\alpha u + \beta v = (\alpha u_n + \beta v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Vérifier que si les suites $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes, alors la suite $(S_n(\alpha u + \beta v))_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi convergente et que $s(\alpha u + \beta v) = \alpha s(u) + \beta s(v)$.
- (3) Soient $q \in \mathbb{R}$ et la suite $\delta = (\delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\delta_n = q^n$. Vérifier que la suite $(S_n(\delta))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$. De plus, en cas de convergence, vérifier que $s(\delta) = \frac{q}{1-q}$.
- (4) Soit la suite $\theta = (\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\theta_n = u_{n+1} - u_n$.
 - (a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(\theta)$ en fonction de u_{n+1} et u_0 .
 - (b) Dédire que les suites $(S_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de même nature de convergence. De plus, en cas de convergence, vérifier que $s(\theta) = \ell - u_0$ où $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (5) Supposons dans cette question que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. Montrer que la suite $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si elle est majorée.
- (6) Dans cette question, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Montrer que si la suite $(S_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors la suite $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi convergente et que $s(u) \leq s(v)$.
- (7) On considère la suite $|u| = (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que si la suite $(S_n(|u|))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors la suite $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi convergente.
 (**Ind.** on rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = x^+ - x^-$ avec $x^+ = \max(0, x)$ et $x^- = \max(0, -x)$. De plus, $0 \leq x^+ \leq |x|$ et $0 \leq x^- \leq |x|$)
- (8) Dans cette question, on suppose que les suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont à termes strictement positifs.

- (a) Supposons que $u_n = O(v_n)$. Montrer que si la suite $(S_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors la suite $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi convergente.
- (b) Supposons que $u_n \sim v_n$. Justifier que $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$ puis déduire que les deux suites $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$ sont de même nature de convergence.

Partie 2 (8 points)

Dans cette partie, on considère les deux suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. On considère une suite $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à termes **strictement positifs** telle qu'il existe un réel $\alpha > -1$ vérifiant: $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \sim \frac{\alpha}{n}$.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = S_n(u) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.

(b) Déduire que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

(c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(v) = +\infty$. (**Ind.** utiliser la question (6) de la partie 1)

(d) En justifiant votre réponse, que peut-on dire sur la réciproque de la question (1) de la partie 1?

(2) (a) Justifier que: $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) \sim \frac{-1}{n}$.

(b) Montrer que: $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \sim \frac{1+\alpha}{n}$.

(c) En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(d) Montrer que $u_n = O(a_n)$ puis déduire que la suite $(S_n(A))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente. (**Ind.** utiliser la question (8) de la partie 1)

(3) Justifier que $\left(\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1\right) \sim \frac{-1}{2n}$ puis retrouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(v) = +\infty$.

Partie 3 (3 points)

(1) On considère les suites $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{(-1)^n}{n}, \alpha_n = S_{2n}(w) = \sum_{k=1}^{2n} w_k \text{ et } \beta_n = S_{2n+1}(w) = \sum_{k=1}^{2n+1} w_k.$$

(a) Montrer que les deux suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes puis déduire que la suite $(S_n(w))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

(b) En justifiant votre réponse, que peut-on dire sur la réciproque de la question (7) de la partie 1?

(2) Soit la suite $B = (b_n)_{n \geq 2}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2, b_n = \arctan\left(\frac{1}{n} \arccos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Montrer que la suite $(S_n(B))_{n \geq 2}$ est strictement croissante puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(B) = +\infty$.

(**Ind.** utiliser la question (1) de la partie 2 et la question (8) de la partie 1).

Bon travail