

Devoir de Synthèse 1^{er} Semestre

Physique

Mardi 14 Décembre 2021

- Les résultats littéraux devront être encadrés.
- Les résultats littéraux non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.
- Les calculatrices sont autorisées.

☞ ★★★ ☞

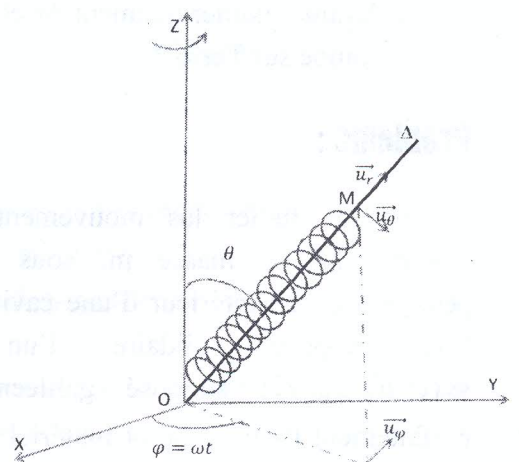
Exercice 1:

Un référentiel $\mathcal{R}$ (O,x,y,z) est lié à la terre supposée galiléenne. Une tige Δ , sans masse dont la partie inférieure est fixe en O, tourne autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ de manière que l'angle $\theta = (\vec{Oz}, \Delta)$ reste constant.

Un anneau M de masse m est attaché à l'extrémité d'un ressort de raideur K et de longueur à vide r_0 , peut glisser sans frotter le long de la tige. L'autre extrémité du ressort est fixée au point O. Le point M est repéré par le vecteur position $\vec{OM} = r \vec{u}_r$. La force de tension appliquée au point M s'écrit sous la forme $\vec{F} = -K(r - r_0)\vec{u}_r$.

On désigne par $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ la base sphérique associée au repère $\mathcal{R}'$ et liée à la tige. Le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ a la même origine O du référentiel $\mathcal{R}$.

- 1) Quelles sont les forces qui s'appliquent à M dans le référentiel $\mathcal{R}'$? Les identifier.
- 2) Etablir le principe fondamental de la dynamique et déduire une équation différentielle du mouvement.
- 3) Discuter les solutions de cette équation différentielle en tenant compte de la condition initiale (à $t=0$, $r = r_1$ et $dr/dt = 0$).
- 4) Déterminer l'expression littérale de l'énergie potentielle de l'anneau M dans le référentiel $\mathcal{R}'$.
- 5) Aura-t-il des positions d'équilibre de l'anneau M dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Si oui, étudier leur stabilité.
- 6) Par application du théorème de l'énergie mécanique, retrouver l'expression de l'équation différentielle de M dans $\mathcal{R}'$.



Exercice 2:

Un satellite S, de masse m , est en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre à $h = 800$ km d'altitude. Sachant que le satellite est soumis principalement à la force de gravitation terrestre qui s'écrit : $\vec{F}_G = -\frac{GM_T m}{r^2} \vec{u}_r$

Où G est la constante universelle d'attraction et M_T la masse de la Terre.

- 1) Exprimer la norme de la vitesse du satellite en projetant le PFD selon la normale.
- 2) Dédurre l'expression de la période T relative à un tour complet autour de la terre.
- 3) Exprimer les expressions des énergies cinétique E_c et potentielle E_p du satellite placé à l'orbite circulaire de rayon r ; (on prend $E_p(\infty) = 0$). En déduire l'expression de l'énergie mécanique $E_m(r)$.

Sur cette orbite, on constate que l'altitude de satellite diminue de Δr durant une seule période de rotation T . Cette diminution est due aux frottements avec l'atmosphère modélisée par une force de frottement fluide quadratique $\vec{f} = -\alpha m V \vec{V}$ où $\vec{V}$ désigne la vitesse du satellite sur l'orbite circulaire et V sa norme.

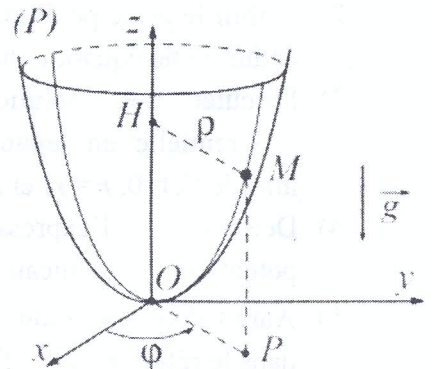
Le coefficient α est supposé indépendant de l'altitude du satellite : $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-15} \text{ m}^{-1}$. On donne aussi le rayon terrestre : $R_T = 6371$ km.

- 4) Exprimer le module de la force de frottement fluide quadratique $\vec{f}$.
- 5) Déterminer l'expression du travail de la force de frottement $\vec{f}$ pour un tour complet. Dédurre que la variation de l'énergie mécanique vérifie :

$$\Delta E_m = -2\pi\alpha G M_T m$$
- 6) D'autre part, cette variation de l'énergie mécanique ΔE_m peut-être estimée en évaluant les énergies mécaniques aux rayons r et $(r - \Delta r)$, soit : $\Delta E_m = E_m(r - \Delta r) - E_m(r)$. Donner l'expression de la variation ΔE_m .
- 7) Que vaut Δr littéralement en fonction de α et r sachant que $r \gg \Delta r$.
- 8) Evaluer numériquement Δr et déterminer le nombre de tours nécessaire pour que ce satellite tombe sur Terre ?

Problème :

On désire étudier les mouvements possibles d'un point matériel M de masse m , sous l'action du champ de pesanteur $\vec{g}$, à l'intérieur d'une cavité fixe (paraboloïde) que l'on suppose solidaire d'un référentiel terrestre $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ supposé galiléen. Cette surface étant parfaitement lisse, le point matériel M glisse sans frottement sur (P). Compte tenu de la symétrie du problème, on utilisera les coordonnées cylindriques de M (ρ, φ, z).



La position de M est définie par la relation suivante : $\rho^2 = \alpha z$; avec α est une constante positive.

Compte tenu de la symétrie du problème, on exprimera les grandeurs vectorielles dans la base cylindrique locale $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi, \vec{u}_z)$.

Etude Dynamique

- 1) Exprimer les vecteurs position $\vec{OM}$ et vitesse $\vec{V}(M)$ du point M par rapport à $\mathcal{R}$.
- 2) Exprimer l'accélération $\vec{a}(M)$ du point M par rapport à $\mathcal{R}$. Justifier que :

$$a_\phi = \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho^2 \dot{\phi})}{dt}$$

- 3) La réaction R exercée par (P) sur M est contenue dans le plan OHP défini par les vecteurs de base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_z)$.
 - a. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point M dans $\mathcal{R}$. Le projeter dans la base cylindrique.
 - b. Montrer que $\rho^2 \dot{\phi} = Cte$, cette constante étant dans toute la suite notée K.

Energie

- 4) Quelle est, en fonction des coordonnées de M et de leurs dérivées, l'expression de l'énergie cinétique E_C de la particule par rapport dans $\mathcal{R}$.
- 5) Justifier l'existence d'une énergie potentielle E_P dont dérive la résultante des forces extérieures agissant sur M.
- 6) Exprimer E_P en fonction de ρ en supposant que $E_P(0) = 0$.
- 7) Que peut-on dire de l'énergie mécanique E_M de M ?

Discussion générale du mouvement

- 8) Dédurre de ce qui précède une équation du premier ordre, à une seule inconnue, de la forme

$$\frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 G(\rho) + E_{p,ef}(\rho) = E_M$$

Où $G(\rho)$ est un terme positif et sans dimension, $E_{p,ef}$ l'énergie potentielle effective et E_M l'énergie mécanique.

- 9) Expliciter $G(\rho)$ et $E_{p,ef}(\rho)$.
- 10) Représenter avec soin le graphe $E_{p,ef}$. Montrer que $E_{p,ef}(\rho)$ passe par un minimum pour une valeur ρ_m de ρ que l'on explicitera en fonction de K, α et g.
- 11) Discuter, à l'aide du graphe de $E_{p,ef}$, la nature du mouvement de M. Montrer qu'il s'agit toujours d'un état lié.
- 12) Une petite perturbation écarte légèrement la coordonnée ρ de la valeur ρ_m pour laquelle l'énergie potentielle $E_{p,ef}(\rho)$ soit minimale. Montrer que l'écart $\varepsilon = \rho - \rho_m$ oscille avec une période T que l'on calculera.