

|                                                                  |
|------------------------------------------------------------------|
| <b>Devoir d'Algèbre - Semestre N°2</b><br><b>Section : M.P.1</b> |
|------------------------------------------------------------------|

Durée : 1 Heure

Date : 26 Février 2022

**Exercice 1** (5 points)

On pose  $P(X) = 2X^2 - X - 1$ ,  $Q(X) = (X - 1)^3(X^2 + X + 1)$  et  $F = \frac{P}{Q}$ .

1. Donner la partie entière de  $F$ .
2. Préciser les pôles de  $F$  ainsi que leurs multiplicités.
3. Décomposer en éléments simples  $F$  dans  $\mathbb{C}(X)$ .
4. En déduire la décomposition de  $F$  en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$ .

**Exercice 2** (15 points)Notations et définitions

- On désigne par  $\mathbb{K}$  le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .
- $\mathbb{K}[X]$  désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .
- Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } \deg(P) \leq n\}$ .
- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et  $(0)$  désigne la matrice nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- Pour  $P = a_k X^k + \dots a_1 X + a_0$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $P(A)$  désigne la matrice  $a_k A^k + \dots a_1 A + a_0 I_n$ .
- On utilisera sans démonstration que, pour tout  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  
 $(\alpha P + Q)(A) = \alpha P(A) + Q(A)$  et  $PQ(A) = P(A)Q(A)$ .

**On admet que, pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , il existe un polynôme non nul  $P$  tel que  $P(A) = (0)$ .**

Dans ce cas,  $P$  s'appelle un polynôme annulateur de  $A$ .

Dans toute la suite, on fixe  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1. (a) Soit  $P = a_k X^k + \dots a_1 X + a_0$  tel que  $a_0 \neq 0$  et  $P(A) = (0)$ . Montrer que  $A$  est inversible.  
 (b) On suppose que  $A$  est inversible. Soit  $P = a_k X^k + \dots a_r X^r$ ,  $r \geq 1$ .  
 Montrer que si  $P(A) = (0)$  alors il existe  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $Q(0) \neq 0$  et  $Q(A) = (0)$ .  
 (c) En déduire que,  
 $A$  est inversible si et seulement s'il existe  $P \in \mathbb{K}[X]$  annulateur de  $A$  tel que  $P(0) \neq 0$   
 et que  $A^{-1}$  est un polynôme en  $A$ . (c'est à dire, il existe  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $A^{-1} = Q(A)$ ).
2. On note  $\mathbb{K}[A] = \{P(A), P \in \mathbb{K}[X]\}$ .  
 Montrer que  $\mathbb{K}[A]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

3. (a) On pose  $\xi = \{\deg(P); P \neq 0 \text{ et } P(A) = (0)\}$ . Justifier que  $\xi$  admet un minimum.

On note  $d = \min(\xi)$ .

- (b) En déduire qu'il existe un polynôme **unitaire**  $\Pi_A$  de degré  $d$  annulateur de  $A$ .

- (c) Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P(A) = (0)$ . Montrer, à l'aide d'une division euclidienne, que  $\Pi_A$  divise  $P$ .

- (d) En déduire l'unicité de  $\Pi_A$ .

- (e) Montrer que  $\{P \in \mathbb{K}[X], \text{ tel que } P(A) = (0)\} = \Pi_A \mathbb{K}[X]$ .

- (f) Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

i. Montrer qu'il existe  $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$  tel que  $P(A) = R(A)$ .

ii. En déduire que  $\mathbb{K}[A] = \mathbb{K}_{d-1}[A]$ .

4. On pose  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A = I_3 + J$ .

- (a) Calculer  $J^3$ .

- (b) Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Montrer que  $aI_3 + bJ + cJ^2 = (0) \implies a = b = c = 0$ .

- (c) En déduire  $\Pi_J$  puis  $\Pi_A$ .

- (d) Déterminer  $Q \in \mathbb{R}[X]$ , tel que  $A^{-1} = Q(A)$ .