

Devoir surveillé N°2

Durée: 1h

Epreuve: Analyse

Date: 22-02-2022

N. B. Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1 (12 points)

Soit la fonction $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \exp\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)$.

- 1/ Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - 1, 1[$.
- 2/ (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$ et n sont de même parité.
(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $f^{(2n+1)}(0)$.
- 3/ Pour tout $x \in] - 1, 1[$, on pose $\varphi(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow 1^-} (\varphi(x))^n \exp(2\varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (\varphi(x))^n \exp(2\varphi(x)) = 0$.

- 4/ (a) Montrer que f admet un prolongement par continuité sur $[-1, 1]$ noté g que l'on déterminera.
(b) Donner pour tout $x \in] - 1, 1[$, l'expression de $f'(x)$.
(c) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$ et donner les valeurs de $g'(-1)$ et $g'(1)$.
- 5/ (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynômiale $P_n(x)$ à coefficients réels telle que

$$\forall x \in] - 1, 1[, f^{(n)}(x) = P_n(x)(\varphi(x))^{2n} \exp(2\varphi(x)).$$

- (b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, 1]$ et donner pour tout $n \in \mathbb{N}$, les valeurs de $g^{(n)}(-1)$ et $g^{(n)}(1)$.
- 6/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $c_n \in]0, 1[$ tel que

$$\frac{1}{e} = \frac{(-1)^n}{n!} P_n(c_n)(\varphi(c_n))^{2n} \exp(2\varphi(c_n))$$

(Ind. Appliquer Taylor-Lagrange à la fonction g à l'ordre $n - 1$)

Exercice 2 (8 points)

Soit a un réel strictement positif. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction polynômiale $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - a.$$

- 1/ Soit $n \geq 1$.
(a) Montrer que la fonction h_n réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

- (b) En déduire que sur $[0, +\infty[$, l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution notée β_n et que $\beta_n > 0$.
- (c) Montrer que si $n > a$ alors $\beta_n \in]0, 1[$.
- 2/ (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_{n+1}(\beta_n) > 0$.
- (b) En déduire que la suite $(\beta_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante puis qu'elle converge vers une limite notée ℓ .
- 3/ Soit un entier p tel que $p > a$. Vérifier que pour tout $n > p$, on a $0 < \beta_n^n < \beta_p^n$ puis déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n^n = 0$.
- 4/ (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $(x-1)h_n(x) = x^{n+1} - (a+1)x + a$.
- (b) En déduire la valeur de ℓ en fonction de a .
- 5/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- (a) Donner pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'expression de $h_n^{(k)}(x)$.
- (b) Déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$ la valeur de $h_n^{(k)}(0)$.

Bon travail