

Examen fin du deuxième semestre en Analyse

Date: 20/5/2022 _____ Durée: 2h _____ Nombre de pages: 2

N.B. Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Problème 1 (10 points)

Soient les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ et $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

§ Partie 1:

- (1) (a) Justifier que chacune des deux fonctions f et F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puis trouver le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4.
- (b) Donner l'équation de la tangente T à la courbe représentative C_f de f au point $A(0, \frac{1}{2})$ et préciser la position de C_f par rapport à T au voisinage de A .

- (2) De l'expression du $DL_4(0)$ de f , en déduire:

(a) Le développement limité de F au voisinage de 0 à l'ordre 5.

(b) Le développement limité de la fonction $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 4. (Ind. on pourra utiliser $g(-x)$)

- (3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ et $b_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) En appliquant la formule de Leibniz au produit $(1+e^x)f(x)$, montrer que:

$$a_n = \frac{-1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!}$$

(b) Vérifier que $a_n = (n+1)b_{n+1}$ puis déduire que $b_{n+1} = \frac{-1}{2(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{kb_k}{(n-k+1)!}$.

§ Partie 2:

- (1) Justifier que f est convexe sur $[0, +\infty[$ et concave sur $]-\infty, 0]$.

- (2) En déduire que:

(a) $\frac{1}{2} - \frac{x}{4} \leq f(x)$ si $x \in [0, +\infty[$ et que $f(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$ si $x \in]-\infty, 0]$.

(b) $f(x) \leq \frac{1}{2}(\frac{1-e}{1+e})x + \frac{1}{2}$ si $x \in [0, 1]$ et que $\frac{1}{2}(\frac{1-e}{1+e})x + \frac{1}{2} \leq f(x)$ si $x \in [-1, 0]$.

- (3) Déduire alors que: $\forall x \in [0, 1], \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq F(x) \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{4}(\frac{1-e}{1+e})x^2$.

- (4) (a) Trouver l'expression sur $\mathbb{R}$ de $A(x) = \int f(x) dx$ puis de $F(x)$.

(b) Retrouver le $DL_5(0)$ de la fonction F puis retrouver le $DL_4(0)$ de la fonction f .

Problème 2 (10 points)

• Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que f est continue sur $[0, +\infty[$ et vérifiant la condition (*) suivante:

(*) : Ils existent deux réels $A > 0$ et $C > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que $\forall x \geq A, |f(x)| \leq Cx^n$.

• Pour tout réel $\lambda > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $I_{n,\lambda} : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$\forall x \geq 0, I_{n,\lambda}(x) = \int_0^x t^n e^{-\lambda t} dt.$$

§ Partie 1:

(1) (a) Soit P une fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ de degré $n \in \mathbb{N}$. Montrer que:

$$P(x) = O(x^n) \text{ puis déduire que } P \in E.$$

(b) Montrer que la restriction de la fonction $\exp$ sur $[0, +\infty[$ n'appartient pas à E .

(2) (a) Soient $\lambda > 0, n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$. Montrer que: $I_{n+1,\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda} ((n+1) I_{n,\lambda}(x) - x^{n+1} e^{-\lambda x})$.

(b) Soit $\lambda > 0$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que: $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} I_{n,\lambda}(x) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$.

(c) Soient $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que la fonction $I_{n,\lambda}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et déduire que $\forall x \geq 0, I_{n,\lambda}(x) \leq \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$.

§ Partie 2:

• Soit $f \in E$. On sait qu'ils existent deux réels $A > 0$ et $C > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que $\forall x \geq A, |f(x)| \leq Cx^n$.

• Pour tout réel $\lambda > 0$, on considère la fonction $L_{f,\lambda} : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$\forall x \geq 0, L_{f,\lambda}(x) = \int_0^x f(t) e^{-\lambda t} dt.$$

(1) Supposons dans cette question que $\forall x \geq 0, f(x) \geq 0$. Soit $\lambda > 0$.

(a) Justifier que la fonction $L_{f,\lambda}$ est croissante sur $[0, +\infty[$.

(b) Montrer que: $\forall x \geq 0, 0 \leq L_{f,\lambda}(x) \leq L_{f,\lambda}(A) + C \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$.

(c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} L_{f,\lambda}(x)$ existe et c'est un réel positif.

(2) On considère la fonction $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $\forall x \geq 0, g(x) = f(x) + |f(x)|$.

(a) Justifier que les fonctions $|f| \in E$ et $g \in E$ et déduire de (1) que $\forall \lambda > 0$, les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} L_{|f|,\lambda}(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} L_{g,\lambda}(x)$ existent et finies.

(b) En déduire que $\forall \lambda > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} L_{f,\lambda}(x)$ existe et finie. On pose $L_f(\lambda) = \lim_{x \rightarrow +\infty} L_{f,\lambda}(x)$ et la fonction $L_f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ qui à $\lambda \mapsto L_f(\lambda)$ est appelée la transformée de Laplace de f .

(3) (a) Justifier l'existence de $M = \sup_{x \in [0,A]} |f(x)|$ puis vérifier que $\forall \lambda > 0, L_{|f|,\lambda}(A) \leq \frac{M}{\lambda} (1 - e^{-\lambda A})$.

(b) En déduire que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} L_{|f|}(\lambda) = 0$ puis que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} L_f(\lambda) = 0$.

Fin de l'examen et bon travail