

Devoir de contrôle d'Algèbre

Section : M.P1

Durée : 1h30min

Exercice 1 Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. $\forall z_1, z_2, \dots, z_p \in \mathbb{K} (= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \left(\sum_{k=1}^p z_k^2 = 0 \implies z_1 = z_2 = \dots = z_p = 0 \right)$.
2. L'ensemble des solutions de l'équation $e^z = -2$ est $\{\ln(2) + i\pi(1+k); k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Soit $\{z_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \subset \mathbb{C}$. Alors $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p z_{ij} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n z_{ji}$.
4. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Si AB est nulle, alors A est nulle ou B est nulle.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible, alors son inverse est unique.

Exercice 2 Soit $q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On considère la somme double

$$S_n(q) = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} q^k.$$

1. Vérifier que : $S_n(q) = \frac{1}{(1-q)^2} (1 - (n+2)q^{n+1} + (n+1)q^{n+2})$.
2. Démontrer que : $S_n(q) = \sum_{k=0}^n (k+1)q^k$.
3. En déduire la somme $\sum_{k=1}^n k2^{k-1}$ en fonction de n .

Problème Dans tout le problème $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ et à coefficients réels, I_n est la matrice unité et 0_n est la matrice nulle.

Partie 1 : Puissance d'une matrice

Dans cette partie on suppose que $n = 3$. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et la matrice unité } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $K = J - I_3$.

1. (i) Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, $J^p = 3^{p-1}J$.
 (ii) En déduire K^p , en fonction de I_3 et J .
2. Calculer K^2 en fonction de I_3 et K .
3. En déduire que K est inversible et calculer son inverse K^{-1} .
4. Soit $M = aI_3 + bJ$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
 Montrer que M est nulle si, et seulement si, $a = b = 0$.
5. Dans cette question on pose $A = xI_3 + yJ \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, où x et y sont des réels.
 - (i) Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer A^p en fonction de x , y et p .
 - (ii) Posons $A' = x'I_3 + y'J$. Montrer que A' est l'inverse de A si, et seulement si, les réels x' et y' sont solution du système d'inconnus a et b :

$$(S) : \begin{cases} xa = 1 \\ ya + (x + 3y)b = 0. \end{cases}$$

- (iii) Montrer que Le système (S) admet des solutions si, et seulement si, $x(x + 3y) \neq 0$.
- (iv) En déduire que $x' = \frac{1}{x}$ et $y' = \frac{1}{3(x+3y)} - \frac{1}{3x}$.
- (v) On suppose que A est inversible. Soit $p \in \mathbb{Z}^*$. Calculer A^p en fonction de x , y et p .

Partie 2 : Trace d'une matrice et applications

Dans cette partie n désigne un entier ≥ 2 et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définitions (1) Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, on rappelle que la trace de A est le scalaire $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

(2) A et B sont dites semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe une matrice P inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

1. Quelles sont les matrices semblables à I_n ?
2. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $tr(A) = tr(B)$. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que si A est une matrice antisymétrique, alors $tr(A) = 0$. La réciproque est-elle vraie ?
4. **Applications**
 - (i) Montrer que A et B ne peuvent pas vérifier $AB - BA = I_n$.
 - (ii) Montrer que $tr({}^tAA) = 0$ si, et seulement si, $A = 0_n$.
 - (iii) On suppose que $AB - BA = A$.
 - (a) Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, $A^pB - BA^p = pA^p$.
 - (b) En déduire la trace de A^{2022} .
 - (iv) Résoudre l'équation, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$(E) : X + tr(X)A = B.$$