

Devoir de synthèse d'Algèbre

Section : M.P1

Durée : 2h

Exercice 1 Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. Soient E un ensemble non vide et A une partie de E , l'application $f_A : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ qui à tout X associe $f_A(X) = A \cap X$ est injective.
2. L'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2 + x + 1$ est surjective, injective.
3. Le déterminant d'une matrice antisymétrique est nul.
4. Si $f : E \longrightarrow E$ est une application et B une partie de E , alors, $f^{-1}f(B) = B$
5. S'il existe deux entiers relatifs p, q tels que $24p + 8q = 8$ alors $p \wedge q = 8$.

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle le n -ième nombre de Mersenne l'entier $M_n = 2^n - 1$.

1. Soient m, n, k et x des entiers strictement positifs avec $x \geq 2$.
 - (a) Justifier que $x^k - 1$ est divisible par $(x - 1)$.
 - (b) En partant de la division euclidienne de m par n , effectuer la division euclidienne de $x^m - 1$ par $x^n - 1$.
2. Soient m, n et a des entiers strictement positifs avec $a \geq 2$. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, montrer que $(a^n - 1) \wedge (a^m - 1) = a^{n \wedge m} - 1$.
3. Soient $x > 2$ et $n \geq 2$ des entiers. Montrer que $x^n - 1$ n'est pas premier.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si M_n est premier, alors n est premier.
5. Soient p et q des nombres premiers distincts. Montrer que $M_p \wedge M_q = 1$.

Problème On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et par $\mathcal{M} := \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $GL_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}$. I_n est la matrice identité et 0_n est la matrice nulle.

Soit $A \in \mathcal{M}$, on définit :

$$\mathcal{Z}(A) = \{X \in \mathcal{M} / AX = XA\}$$

1. Montrer que $\mathcal{Z}(A)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}, +)$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Déterminer $\mathcal{Z}(A)$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

3. On pose $\mathbf{Z}(\mathcal{M}) = \{X \in \mathcal{M}; \forall A \in \mathcal{M}, AX = XA\}$. Montrer que $(\mathbf{Z}(\mathcal{M}), +)$ est un groupe abélien. Il est appelé le centre de $\mathcal{M}$.
4. Dans cette question, on se propose de montrer que les seules matrices de $\mathcal{M}$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}$ sont les matrices scalaires c'est-à-dire qui sont de type λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$.
- a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$. Justifier que $A \in \mathbf{Z}(\mathcal{M})$.
- b) On suppose que $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{Z}(\mathcal{M})$. Calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$ où

$$E_{ij} = \begin{matrix} \text{\scriptsize } i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \text{\scriptsize } j^{\text{ème}} \text{ colonne} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(avec 1 correspond au coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne)

- c) Dédurre que $a_{i,i} = a_{j,j}, \forall i, j$ et $a_{i,k} = 0, \forall k \neq i$.
- d) Conclure.
5. a) Montrer que $\{A \in \mathcal{M}; \forall M \in GL_n(\mathbb{K}), AM = MA\} = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}$.
(Indication : considérer la matrice $M = I_n + E_{i,j}, i \neq j$)
- b) Soit $A \in \mathcal{M}$. On suppose que $\forall M, N \in \mathcal{M},$ on a

$$A = MN \Rightarrow A = NM.$$

- (i) Soit $B \in GL_n(\mathbb{K})$, montrer que $AB = BA$.
- (ii) Dédurre qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.
6. Dans cette question D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}$ dont les coefficients diagonaux λ_i sont supposés distincts deux à deux.
Montrer que $\mathbf{Z}(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales.
7. Si $P \in GL_n(\mathbb{K})$, on considère l'application $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, X \mapsto PXP^{-1}$.
- a) Montrer que φ est bijective et déterminer φ^{-1} .
- b) Si $X \in \mathbf{Z}(A)$, déterminer $\varphi(X)$.
- c) Supposons que $A = PDP^{-1}$. Montrer que $\varphi(\mathbf{Z}(A)) = \mathbf{Z}(\varphi(A))$.
- d) Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (i) Justifier que $P \in GL_3(\mathbb{R})$.

(ii) Vérifier que $AP = PD$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

- (iii) Déterminer $\mathbf{Z}(A)$ en fonction de P et P^{-1} .