

Devoir de contrôle du 1^{er} semestre en Analyse

Date: 18/10/2022 _____ Durée: 1h30 _____ Nombre de pages: 2

N.B Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1 (7 points)

• **Partie 1** (quelques questions du cours)

Montrer que:

1/ $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x.$

2/ $\forall x \in \mathbb{R}, \arccos(\cos(x)) = x$ si et seulement si $x \in [0, \pi].$

3/ $\forall x \in [-1, 1], \arccos(-x) = \pi - \arccos(x).$

4/ $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$

• **Partie 2**

1/ Montrer que: $\forall x, y \in [-1, 1], \arccos(\cos(\arccos(x) + \arccos(y))) = \arccos(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}).$

2/ En déduire que: $\forall x, y \in [-1, 1], \arccos(x) + \arccos(y) =$

$$\begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}) & \text{si } x+y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}) & \text{si } x+y \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 2 (5 points)

1/ Calculer sur $I =]-1, 1[$, l'expression de $F(x) = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (Ind. utiliser le changement de variable $x = \sin(t)$).

2/ On considère l'équation différentielle suivante: $(E) : \sqrt{1-x^2}y'(x) + \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}y(x) = 1$ où $y :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

a/ Chercher la solution générale de l'équation (E) puis trouver l'unique solution f de (E) vérifiant $f(0) = \frac{1}{2}.$

b/ Soit $y :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]-1, 1[$ et on considère la fonction z définie sur $]-1, 1[$ par $z(x) = (1+x^2)y(x)$. Montrer que y est une solution de (E) si et seulement si z est une solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle suivante: $(F) : z'(x) = \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ puis retrouver la solution générale de l'équation (E) .

Exercice 3 (8 points)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1/ a/ Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donner l'expression de $f'(x)$.

b/ En admettant que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - x}{x^2} = 0$, justifier que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

c/ Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2/ On considère les deux intégrales $I(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ et $J(x) = \int \frac{\cos(x)}{(1+\sin^2(x))^2} dx$ où $x \in \mathbb{R}$.

a/ Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 f'(x) = -2 \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$ (Ind. utiliser une i.p.p.).

b/ En déduire l'expression sur $\mathbb{R}$ de $I(x)$.

c/ En utilisant une intégration par parties sur l'intégrale $K(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx$ (où $x \in \mathbb{R}$), retrouver l'expression sur $\mathbb{R}$ de $I(x)$.

d/ Déduire alors l'expression sur $\mathbb{R}$ de $J(x)$.

3/ Résoudre l'équation différentielle suivante: $(E) : y'(x) - \tan(x)y(x) = \frac{1}{(1+\sin^2(x))^2}$

où $y : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

Bon travail