

Examen fin du 1^{er} semestre en Analyse

Date: 05/01/2023 _____ Durée: 2h _____ Nombre de pages: 2

- **NB** Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Problème

• On rappelle qu'une partie G de $\mathbb{R}$ est dite un **sous-groupe additif** de $\mathbb{R}$ si: $G \neq \emptyset$ et $\forall x, y \in G, x - y \in G$ (en particulier, $0 \in G$).

• Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $a\mathbb{Z} = \{ak; k \in \mathbb{Z}\}$ et $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{am + bn; m, n \in \mathbb{Z}\}$.

☒ **Partie 1** (2.5 points) Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

- (1) (a) Montrer que l'ensemble $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
 (b) Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = |a|\mathbb{Z} + |b|\mathbb{Z}$. **NB** en particulier, (en prenant $b = 0$), l'ensemble $a\mathbb{Z} = |a|\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, il est appelé *le sous-groupe monogène de $\mathbb{R}$ engendré par a* .

- (2) Montrer que le sous-groupe monogène $a\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

☒ **Partie 2** (5.5 points)

Le but de cette partie est de montrer qu'un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit monogène soit dense dans $\mathbb{R}$. Pour cela, soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ tel que $G \neq \{0\}$ et posons $G^+ = \{x \in G; x > 0\}$.

- (1) Montrer que si un réel $a \in G$, alors $a\mathbb{Z} \subseteq G$.
- (2) Montrer que $G^+ \neq \emptyset$ et que G^+ admet une borne inférieure que l'on notera α et que $\alpha \geq 0$.
- (3) On suppose ici que $\alpha = \inf(G^+) > 0$.
 (a) Montrer que $\alpha = \min(G^+)$ puis déduire que $\alpha\mathbb{Z} \subseteq G$.
 (b) Soit $x \in G$ et posons $m = E(\frac{x}{\alpha})$ et $y = x - m\alpha$. Montrer que $y = 0$ (**Ind.** vérifier tout d'abord que $y \in G \cap [0, \alpha[$), puis déduire que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
- (4) On suppose ici que $\alpha = \inf(G^+) = 0$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et posons $\varepsilon = y - x$.
 (a) Justifier que $]0, \varepsilon[\cap G \neq \emptyset$.
 (b) Soit $a \in]0, \varepsilon[\cap G$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(k-1)a \leq x < ka$ et $x < ka < y$ puis déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.

☒ **Partie 3** (2 points)

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ et posons $H = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ (**NB** D'après la question (1), partie 1, $H = |a|\mathbb{Z} + |b|\mathbb{Z}$).

- (1) On suppose ici que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$ et soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que p et q sont premiers entre eux et $\frac{|a|}{|b|} = \frac{p}{q}$. Posons $\beta = \frac{|a|}{p} = \frac{|b|}{q}$. Montrer que $\beta \in H$ puis déduire que $H = \beta\mathbb{Z}$.
 (**Ind.** On rappelle que d'après le théorème de Bézout, ils existent $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $pu + qv = 1$)

(2) On suppose ici que $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

(a) Montrer que $\forall \beta \in \mathbb{R}, H \neq \beta\mathbb{Z}$. (**Ind.** Raisonner par absurde)

(b) Dédire que H est dense dans $\mathbb{R}$.

☒ **Partie 4** (4 points)

(1) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe r -périodique où $r \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire, $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+r} = X_n$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que: $\forall k \in \mathbb{N}, X_{n+kr} = X_n$.

(b) Supposons ici que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers un nombre $\ell \in \mathbb{C}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\gamma_n = X_{k+nr}$. Justifier que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers ℓ puis déduire que $X_k = \ell$.

(c) Dédire alors que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si elle est constante.

(2) Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ tel que $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ où $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = e^{in\theta}$.

Montrer que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. (**Ind.** Vérifier tout d'abord que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est q -périodique)

☒ **Partie 5** (6 points)

Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ tel que $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$. Posons $A = \theta\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z} = \{n\theta + 2k\pi; n \in \mathbb{N} \text{ et } k \in \mathbb{Z}\}$ et $B = \theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \{n\theta + 2k\pi; n \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Justifier que l'ensemble B est dense dans $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que l'ensemble A n'est pas un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

(3) On se propose de montrer ici que l'ensemble A est dense dans $\mathbb{R}$. Pour cela, soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et posons $\varepsilon = y - x$.

(a) Supposons ici que $x \geq 0$ (c-à-d $0 \leq x < y$).

(i) Montrer que $]0, \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$.

(ii) Soit $a \in]0, \varepsilon[\cap A$ et posons $k_1 = E(\frac{x}{a}) + 1$. Vérifier que $k_1 a \in]x, y[\cap A$.

(b) Supposons ici que $y \leq 0$ (c-à-d $x < y \leq 0$).

(i) Montrer que $] -\varepsilon, 0[\cap A \neq \emptyset$.

(ii) Soit $a \in] -\varepsilon, 0[\cap A$ et posons $k_2 = E(\frac{-x}{a}) + 1$. Vérifier alors que $(-k_2 a) \in]x, y[\cap A$.

(c) En déduire que l'ensemble A est dense dans $\mathbb{R}$.

(d) Retrouver que l'ensemble B est dense dans $\mathbb{R}$.

(4) Posons $\Omega_1 = \{\cos(n\theta); n \in \mathbb{N}\}$ et $\Omega_2 = \{\sin(n\theta); n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que chacun des deux ensembles Ω_1 et Ω_2 est dense dans $[-1, 1]$.

(**Ind.** On rappelle que si une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en un point a , alors pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a: si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$).

Bon travail