

UNIVERSITÉ DE SFAX Année universitaire : 2022/2023

★ ★ ★ ★ ★

Institut Préparatoire aux Études
d'Ingénieurs de Sfax

Devoir de synthèse d'Algèbre - Symèstre N°2

Section : MP1 Durée : 2h

Exercice 1

Dans tout cet exercice E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ muni d'une base $B = (e_1, \dots, e_n)$, f désigne un endomorphisme de E et $A = \text{Mat}(f, B)$: la matrice de A dans la base B .

Définitions : • Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est dit valeur propre de A s'il existe $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $AU = \lambda U$. On note $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$: appelé le polynôme caractéristique de A . On note $S_p(A)$: l'ensemble des valeurs propres de A .
• Deux matrices A et A_1 sont dites semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PA_1P^{-1}$.

Partie 1 : Préliminaire

1. Montrer que si $\lambda \in S_p(A)$, alors $\lambda^k \in S_p(A^k), \forall k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $\lambda \in S_p(A)$, si et seulement si, $\lambda I_n - A$ est non inversible.
3. En déduire que :
(i) $\lambda \in S_p(A)$, si et seulement si, $\chi_A(\lambda) = 0$.
(ii) $0 \in S_p(A)$, si et seulement si, $\det(A) = 0$.
4. Montrer que si deux matrices A et A_1 sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_A(X) = \chi_{A_1}(X)$. En déduire que $S_p(A) = S_p(A_1)$.

Partie 2 : Étude sur un exemple

Dans cette partie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$X = (x, y, z) \longmapsto (3x + y, -4x - y, 4x + 8y - 2z)$$

1. Déterminer $A = \text{Mat}(f, B)$.
2. Déterminer $\chi_A(X)$ le polynôme caractéristique de A . En déduire que $S_p(A) = \{-2, 1\}$.
3. Déterminer un vecteur $U = (u_1, u_2, u_3)$ tel que $u_1 > 0$ et $\ker(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{vect}(U)$.

4. Montrer que $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3})^2$ est un plan vectoriel d'équation : $4x + 4y - z = 0$, puis vérifier que $U \in \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})^2$.
5. Vérifier que $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3}) \subset \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})^2$ et prouver qu'il existe un vecteur $V \in \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})^2 \setminus \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$ tel que $\{U, V\}$ soit une base de $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3})^2$.
6. Vérifier que $\ker(f + 2id_{\mathbb{R}^3}) = \text{vect}(e_3)$.
7. Montrer que $B_1 = (U, V, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
8. En déduire que $\mathbb{R}^3 = \ker(f - id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(f + 2id_{\mathbb{R}^3})^2$.
9. Montrer qu'il existe un réel α tel que $f(V) = \alpha U + V$.
10. En déduire que la matrice A est semblable à la matrice triangulaire

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Étude d'un endomorphisme nilpotent

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ muni d'une base $B = (e_1, \dots, e_n)$.

Définition : • Un endomorphisme f de E est dit nilpotent s'il existe $m \geq 1$ tel que

$$f^m = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{m\text{-fois le } f} = \tilde{0} : \text{l'endomorphisme nul de } E.$$

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe $m \geq 1$ tel que $A^m = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Partie 1 : Indice de nilpotence

Soit f un endomorphisme **non nul** nilpotent de E .

1. Montrer que la matrice $A = \text{Mat}(f, B)$ est nilpotente.
2. Montrer qu'il existe un plus petit entier $p \geq 2$ tel que f^p est nul.
(Indication : considérer l'ensemble $H = \{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } f^k = \tilde{0}\}$)
L'entier p est appelé **l'indice de nilpotence** de f .
3. Montrer qu'il existe $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$.
4. Montrer que la famille $B_1 = \{x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\}$ est libre dans E .
5. En déduire que l'endomorphisme f^n est nul.
6. On suppose que $p = n$, donc $B_1 = \{x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$.
 - (i) Montrer que B_1 est une base de E .
 - (ii) Déterminer la matrice $A_1 = \text{Mat}(f, B_1)$, puis montrer que A est semblable à la matrice A_1 .
 - (iii) Déduire $\text{rg}(A)$.

Parties 2 : Exemples en dimension 3.

Exemple 1 : On suppose que E est de dimension 3. Soit f un endomorphisme nilpotent de E d'indice $p = 2$.

1. Montrer que $\ker(f) \neq \{0_E\}$ et que $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$.
2. Soit $a \in E$ tel que $(f(a), a)$ est libre.
 - (i) En utilisant le théorème du rang, montrer que $\text{rg}(f) = 1$, puis déduire que $\dim_{\mathbb{R}} \ker(f) = 2$.
 - (ii) Montrer qu'il existe $b \in \ker(f)$ tel que $\mathcal{B}_2 = (b, f(a), a)$ est une base de E .
 - (iii) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_2$.

Exemple 2 : Soit f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ -5 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f est nilpotent d'indice 3.
2. Trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(x) \neq 0_E$
3. Justifier que A est semblable à la matrice $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis donner une matrice de passage P .