

Devoir surveillé N°2

Durée: 1h30

Epreuve: Analyse

Date: 21-02-2023

N.B Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1 (3 points)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $x_0 \in]a, b[$ et une fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f vérifie la condition $(\star)$: Il existe trois réels a_0, a_1 et a_2 tels qu'au voisinage de x_0 ,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

- 1/ Justifier que si f est de classe C^2 sur $]a, b[$ alors la condition $(\star)$ est réalisée.
- 2/ (a) Montrer que f est continue en x_0 et $f(x_0) = a_0$.
(b) Montrer que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a_1$.
- 3/ Montrer que si $a_1 \neq 0$ alors $(f(x) - a_0) \underset{x_0}{\sim} a_1(x - x_0)$.
- 4/ Montrer que si $a_1 = 0$ et $a_2 \neq 0$ alors f admet un extremum local en x_0 . (**Ind.** Discuter suivant le signe de a_2).

Exercice 2 (5 points)

On suppose qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $ae^2 + be + c = 0$ et on se propose de montrer que $a = b = c = 0$. Pour cela, on considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ae^x + ce^{-x}$.

- 1/ Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donner $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$ l'expression de $f^{(n)}(x)$.
- 2/ Montrer que $f(1) \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) \in \mathbb{Z}$.
- 3/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un réel $\theta_n \in]0, 1[$ tel que $\frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n} \in \mathbb{Z}$.
- 4/ Justifier que la suite $(f^{(n)}(\theta_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.
- 5/ Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0$, $f^{(n)}(\theta_n) = 0$. (**Ind.** On rappelle ici qu'une suite d'entiers relatifs est convergente si et seulement si elle est stationnaire).
- 6/ Montrer alors que $a = c = 0$ puis $b = 0$.

Problème (12 points)

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, (f \circ f)(x) = x$.

Partie I

- 1/ Vérifier que $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
- 2/ Montrer que si $f \in \mathcal{F}$ alors f est bijective et donner sa fonction réciproque f^{-1} .

- 3/ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et soit $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et injective sur I . Soient x_0, y_0, x_1 et y_1 dans I tels que $x_0 < y_0$ et $x_1 < y_1$. On considère la fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in [0, 1], \quad \varphi(t) = (\Phi((1-t)x_0 + tx_1)) - (\Phi((1-t)y_0 + ty_1))$$

- (a) Montrer que φ ne s'annule pas sur $[0, 1]$.
 - (b) En déduire que $\varphi(0) \times \varphi(1) > 0$.
 - (c) Déduire alors que Φ est strictement monotone sur I .
- 4/ En déduire que si $f \in \mathcal{F}$ alors f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
- 5/ (a) Soit $f \in \mathcal{F}$ telle que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il n'existe pas un réel x tel que $x > f(x)$.
- (b) Déterminer alors l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ qui sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

Partie II

- 1/ Donner un exemple d'une fonction $f_0 \in \mathcal{F}$ telle que f_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- 2/ Soit $f \in \mathcal{F}$ telle que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$.
 - (b) Montrer que f admet un seul point fixe.
- 3/ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\mathcal{F}_\lambda = \{f \in \mathcal{F}; f \text{ est strictement décroissante et } f(\lambda) = \lambda\}$.

Vérifier que $\mathcal{F}_\lambda \neq \emptyset$. (Ind. On pourra prendre la fonction $g(x) = -x + 2\lambda$).

- 4/ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (a) Soit $f \in \mathcal{F}_\lambda$ et on note h la restriction de f à $] -\infty, \lambda]$.
Vérifier que h est une bijection de $] -\infty, \lambda]$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ que l'on précisera puis donner sa fonction réciproque h^{-1} .
 - (b) Réciproquement, soient $\psi :] -\infty, \lambda] \rightarrow [\lambda, +\infty[$ une fonction continue bijective et strictement décroissante et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{si } x \leq \lambda; \\ \psi^{-1}(x), & \text{si } x \geq \lambda. \end{cases}$$

Montrer que $f \in \mathcal{F}_\lambda$.

- (c) En déduire l'ensemble $\mathcal{F}_\lambda$.
- 5/ Déterminer alors l'ensemble $\mathcal{F}$.

Bon travail