

Examen fin du deuxième semestre en Analyse

Date: 19/5/2023 _____ Durée: 2 heures _____ Nombre de pages: 2

N.B. Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Problème 1 (9 points)

• Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **convexe** sur $\mathbb{R}$.

§ Partie 1:

- (1) La fonction f est-elle forcément dérivable sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.
- (2) Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $\tau_a : \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction taux d'accroissement de f en a définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
 - (a) Soit $y \in]-\infty, a[$. Justifier que: $\forall x \in]a, +\infty[, \tau_a(y) \leq \tau_a(x)$ puis déduire que f est dérivable à droite en a et $\tau_a(y) \leq f'_d(a)$.
 - (b) En déduire que f est dérivable à gauche en a et $f'_g(a) \leq f'_d(a)$.
- (3) Dédurre alors que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- (4) Justifier que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, on a: $f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$.

§ Partie 2:

- (1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ où $a < b$ et $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur $[a, b]$. On considère les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ et

$$w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (f \circ \varphi)\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$
 - (a) Justifier que chacune des deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
 - (b) Vérifier que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(u_n) \leq w_n$.
 - (c) En déduire que: $f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(x) dx\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b (f \circ \varphi)(x) dx$ (appelée l'inégalité de Jensen).
- (2) On considère la suite $(I_n)_{n \geq 2}$ définie par: $\forall n \geq 2, I_n = \frac{1}{n-1} \int_1^n \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) dx$.
 - (a) Montrer que: $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$ puis déduire que $\forall n \geq 2, I_n \leq e$.
 - (b) Justifier que la fonction $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$ puis déduire que

$$\forall n \geq 2, \exp\left(\frac{1}{n-1} \int_1^n x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx\right) \leq I_n.$$
 - (c) Montrer que $\forall n \geq 2, \int_1^n x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2} \left(n - 1 + n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln(1+n)\right)$.
 - (d) En déduire que la suite $(I_n)_{n \geq 2}$ est convergente et déterminer sa limite.

Problème 2 (11 points)

- On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x \times sh(\frac{1}{x})$.

§ Partie 1:

- Étudier la parité de f et justifier que f n'admet pas un prolongement par continuité en 0.
 - Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = (th(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x})ch(\frac{1}{x})$.
 - Montrer que: $\forall x > 0, th(x) < x$.
 - Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$ et vérifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ de f , admet au voisinage de $(\pm\infty)$ une asymptote horizontale Δ_0 que l'on précisera.
- Trouver les $DL_4(\pm\infty)$ de la fonction f .
 - En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ_0 au voisinage de $(\pm\infty)$.

§ Partie 2:

On considère la fonction $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt$.

- Montrer que g est impaire et que: $\forall x \in \mathbb{R}^*$, les réels x et $g(x)$ ont le même signe.
- Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = f(x)(1 - \frac{1}{2}ch(\frac{1}{x}))$ puis déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (Rappel: $\forall x \in \mathbb{R}, sh(2x) = 2sh(x)ch(x)$).
 - Étudier sur $]0, +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}^*$, le signe de $\varphi(x) = 1 - \frac{1}{2}ch(\frac{1}{x})$.
- En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, montrer que:
 $\forall x > 0, x + \frac{x^3}{6} < sh(x)$.
 - En déduire que: $\forall x > 0, g(x) \geq \frac{x}{2} + \frac{1}{6x}$ puis trouver $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- Donner alors le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}^*$.
- On considère la fonction $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $\forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) = \frac{sh(x) - x}{x^3}$.
 - Montrer que h admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ noté h_0 que l'on précisera.
 - Soit la fonction $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \int_0^x h_0(t) dt$. Montrer qu'au voisinage de $(\pm\infty)$, $H(\frac{1}{x}) = \frac{1}{6x} + o(\frac{1}{x})$.
 - Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = \frac{x}{2} + \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} h(t) dt$.
 - Montrer qu'au voisinage de $(\pm\infty)$, $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{6x} + o(\frac{1}{x})$.
 - En déduire que la courbe $\mathcal{C}_g$ de g , admet au voisinage de $(\pm\infty)$ une asymptote oblique Δ_1 que l'on précisera et déterminer la position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à Δ_1 au voisinage de $(\pm\infty)$.

Bon travail